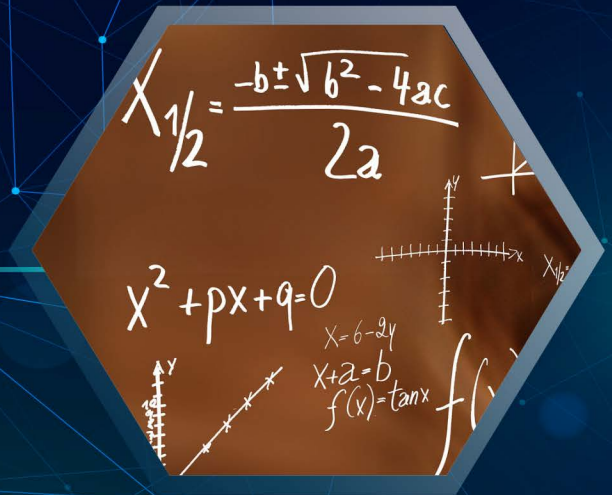


Buku Ajar

STRUKTUR ALJABAR 1



Drs. Ropinus Sidabutar, M.Pd



BUKU AJAR
STRUKTUR ALJABAR 1

BUKU AJAR STRUKTUR ALJABAR 1

Drs. Ropinus Sidabutar, M.Pd



BUKU AJAR STRUKTUR ALJABAR 1

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Drs. Ropinus Sidabutar, M.Pd

Editor: Debora Exaudi Sirait, S.Si., M.Si.

Cetakan Pertama : November 2021

Cover: Rusli

Tata Letak : Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2021, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2021 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022

; 14,8 x 21 cm

ISBN : 978-623-5847-08-5

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, akhirnya penulis dapat menyelesaikan penyusunan Modul Ajar Struktur Aljabar 1 . Modul Ajar ini berisi materi untuk perkuliahan Mata Kuliah Struktur Aljabar 1 pada jenjang S1 Program Studi Matematika. Materi berisi Struktur Grup beserta sifat-sifatnya, Homomorfisma, serta Isomorfisma. Selain dari pada itu diberikan juga soal-soal latihan untuk membantu mahasiswa memahami materi yang telah diberikan. Materi dirancang dengan beban 3 SKS dalam satu semester. Materi dari Modul ajar ini diambil dari beberapa sumber yang biasa dipergunakan untuk mempelajari Struktur Aljabar.

Tujuan dari penulisan Modul ajar ini, yaitu untuk membantu para mahasiswa mempelajari dasar-dasar struktur Aljabar ,dengan demikian mahasiswa diharapkan mampu mengkaji lebih lanjut materi Struktur Aljabar 1.

Penulis menyadari banyaknya kekurangan dalam Modul ajar ini, untuk itu penulis senantiasa mengharapakan kritik dan saran untuk penyempurnaan Modul ajar ini. Walaupun demikian, semoga Modul ajar ini bermanfaat bagi yang memerlukannya.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
MODUL 1 HIMPUNAN.....	1
Kegiatan Belajar 1 : Pengertian Himpunan.....	1
1. Cara Penyajian Himpunan.....	1
2. Kardinalitas	4
3. Operasi Himpunan.....	8
4. Prinsip Dualitas.....	10
5. Multi Set.....	12
Kegiatan Belajar 2 : Prinsip Inklusi dan Eksklusi.....	14
MODUL 2 RELASI, PEMETAAN, SISTEM MATEMATIKA	23
Kegiatan Belajar 1: Relasi.....	23
1. Representasi Relasi.....	24
Kegiatan Belajar 2: Pemetaan, Sistem Matematika	36
1. Jenis-Jenis Pemetaan	37
2. Komposisi dari dua buah fungsi.	40
3. Sistem Matematika	41
MODUL 3 GRUP	51
Kegiatan Belajar 1 : Grup.....	51
Kegiatan Belajar 2 : Sifat - sifat Grup.....	65
MODUL 4 SUBGRUP.....	71
Kegiatan Belajar 1 : Subgrup.....	71
1. Sifat Subgrup.....	72
Kegiatan Belajar 2 : Pusat Grup	82
1. Sifat Pusat Grup	82

MODUL 5 GRUP SIKLIS, GRUP PERMUTASI	89
Kegiatan belajar 1 : Grup Siklis.....	89
1. Order grup dan order suatu unsur grup	92
2. Beberapa Catatan Order Unsur.....	93
Kegiatan Belajar 2 : Grup Permutasi	100
MODUL 6 KOSET , TEOREMA LAGRANGE	117
Kegiatan Belajar 1 : Koset.....	117
Kegiatan Belajar 2 : Teorema Lagrange	123
MODUL 7 SUBGRUP NORMAL , GRUP FAKTOR.....	129
Kegiatan Belajar 1 : Subgrup Normal.....	129
Kegiatan Belajar 2 : Grup Faktor (Grup Kuosien).....	140
MODUL 8 HOMORFISMA GRUP.....	153
Kegiatan Belajar 1 : Homorfisma Grup.....	153
Kegiatan Belajar 2 : Sifat-Sifat Homomorphism.....	161
MODUL 9 ISOMORFISMA GRUP	169
Kegiatan Belajar 1 : Isomorfisma Grup	169
Kegiatan Belajar 2 : Teorema Fundamental	
Isomorfisma Grup	173
1. Teorema Isomorfisma I.....	173
2. Teorema Isomorfisma II	176
3. Teorema Isomorfisma III.....	178
DAFTAR PUSTAKA.....	191



MODUL 1

HIMPUNAN

Materi ini merupakan materi prasyarat yang diperlukan untuk memahami materi- materi yang ada dalam struktur Aljabar. Materi ini berisi pengertian Himpunan, sifat- sifat Aljabar dari Himpunan.

Kegiatan Belajar 1 : Pengertian Himpunan

Himpunan diartikan sebagai kumpulan dari obyek-obyek yang dapat diterangkan dengan jelas.

Himpunan dinotasikan dengan sebuah huruf capital, sedangkan keanggotaan nya dituliskan dengan huruf kecil. Misalkan S sebuah himpunan dan x adalah sebuah objek di S , dikatakan x adalah anggota dari S , dan dinotasikan oleh $x \in S$, dalam kasus x bukan anggota S dinotasikan oleh $x \notin S$.

1. Cara Penyajian Himpunan

a. Enumerasi

Contoh 1.

- 1) Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- 2) Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- 3) $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- 4) $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
- 5) $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
- 6) $K = \{\{\}\}$
- 7) Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, \dots, 100\}$
- 8) Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

b. Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A ;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A .

Contoh 2.

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
 $K = \{\{\}\}$

Maka:

$$3 \in A$$

$$5 \notin B$$

$$\{a, b, c\} \in R$$

$$c \notin R$$

$$\{\} \in K$$

$$\{\} \notin R$$

Contoh 3.

Bila $P1 = \{a, b\}$, $P2 = \{\{a, b\}\}$, $P3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

Maka:

$$a \in P1$$

$$a \notin P2$$

$$P1 \in P2$$

$$P1 \notin P3$$

$$P2 \in P3$$

c. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{1, 2, 3, \dots\}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{1, 2, \dots\}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U .

Contoh: Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U , dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

d. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Contoh 4.

- 1) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A = \{x \mid x \text{ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5\}$
atau

$$A = \{x \mid x \in P, x < 5\}$$

yang ekuivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

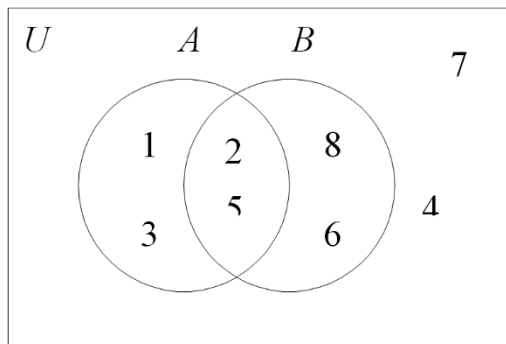
- 2) $M = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}\}$

e. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Venn:



2. Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam A disebut kardinalitas dari himpunan A .
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

- 1) $B = \{x \mid x \text{ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari } 20\}$, atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
- 2) $T = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$, maka $|T| = 5$ (iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

a. Himpunan Kosong

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\emptyset$ atau $\{\}$

Contoh 7.

- 1) $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$
- 2) $P = \{\text{orang Indonesia yang pernah ke bulan}\}$, maka $n(P) = 0$
- 3) $A = \{x \mid x \text{ adalah akar persamaan kuadrat } x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$

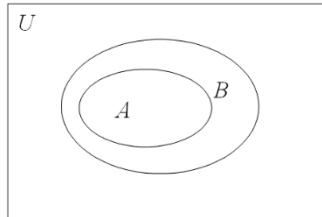
- Himpunan $\{\{\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- Himpunan $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

b. Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen

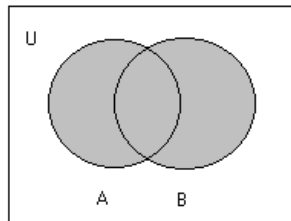
dari B.

- Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



Contoh 8.

1) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$



2) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

3) $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$

4) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1.1.

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

- a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
- b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A

$(\emptyset \subseteq A)$.

c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A .

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\emptyset$ adalah *improper subset* dari A .

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

1) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B .

Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

2) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

c. Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A .

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A .

Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

1) Jika $A = \{0, 1\}$ dan $B = \{x \mid x(x - 1) = 0\}$, maka $A = B$

2) Jika $A = \{3, 5, 8, 5\}$ dan $B = \{5, 3, 8\}$, maka $A = B$

3) Jika $A = \{3, 5, 8, 5\}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:

- a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
- b) jika $A = B$, maka $B = A$
- c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

d. Himpunan yang Ekuivalen

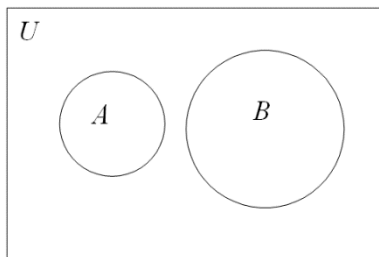
- Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinalitas dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 10.

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

e. Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (disjoint) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A // B$
- Diagram Venn:



Contoh 11.

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, \dots \}$, maka $A // B$.

f. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12.

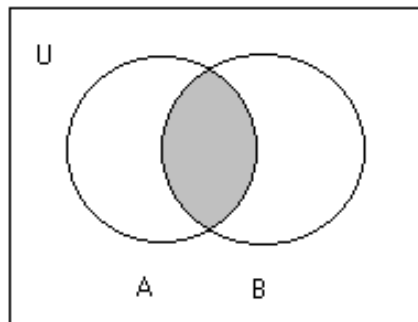
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$

Contoh 13.

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3. Operasi Himpunan

a. Irisan (intersection)



- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Contoh 14.

- 1) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,
maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- 2) Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$.
Artinya: $A // B$

b. Gabungan (union)

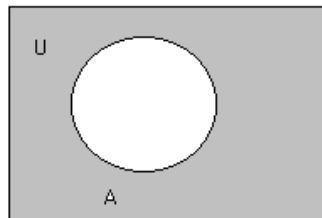
- Notasi : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Contoh 15.

- 1) Jika $A = \{2, 5, 8\}$ dan $B = \{7, 5, 22\}$, maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22\}$ (ii) $A \cup \emptyset = A$

c. Komplemen (complement)

- Notasi : $\bar{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

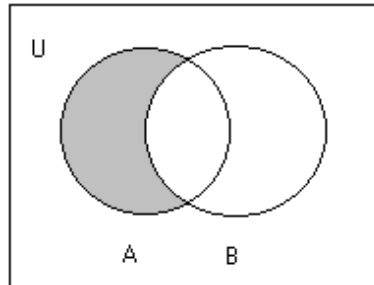
**Contoh 16.**

Misalkan $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$,

- 1) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8\}$
- 2) jika $A = \{x \mid x/2 \in P, x < 9\}$, maka $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

d. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap B^c$



Contoh 18.

- 1) Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B - A = \emptyset$
- 2) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 19.

Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$, maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

4. Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.
- **(Prinsip Dualitas pada Himpunan).** Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplement. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti $\cup$

$\rightarrow \cap, \cap \rightarrow \cup, \emptyset \rightarrow U, U \rightarrow \emptyset$, sedangkan komplement dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S .

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum <i>null</i> /dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplement: $A \cup \bar{A} = U$	Dualnya: $A \cap \bar{A} = \emptyset$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	Dualnya: $A \cap B = \bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\emptyset} = U$	Dualnya: $\bar{U} = \emptyset$