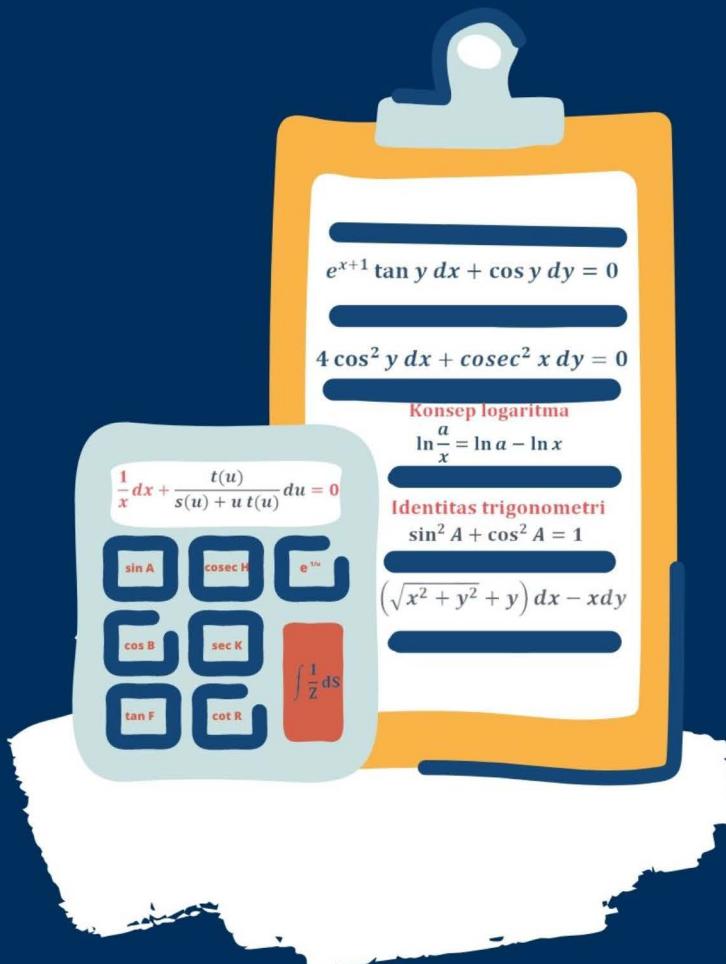


DESSY AGUSTINA SARI

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU (Soal dan Penyelesaian bagi Pemula) : VARIABEL TERPISAH, HOMOGEN, DAN EKSAK



MATEMATIKA UNIVERSITAS

**PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE
SATU (Soal dan Penyelesaian bagi
Pemula): VARIABEL TERPISAH,
HOMOGEN, DAN EKSAK**

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU (Soal dan Penyelesaian bagi Pemula): VARIABEL TERPISAH, HOMOGEN, DAN EKSAK

Dessy Agustina Sari



PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU (Soal dan Penyelesaian bagi Pemula): VARIABEL TERPISAH, HOMOGEN, DAN EKSAK

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:
Dessy Agustina Sari

Editor: Dessy Agustina Sari

Cetakan Pertama: Desember 2021

Cover: Vina Syofiyatul Ulfa

Tata Letak: Maneki Neko dan Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2021, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

**Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT**

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2021 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2021
; 15,5 x 23 cm
ISBN: 978-623-5847-57-3

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Isi diluar tanggung jawab Penerbit
Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

UCAPAN TERIMA KASIH

Saya mempersembahkan karya kedua Matematika Universitas kepada Program Studi S-1 Teknik Kimia Universitas Singaperbangsa Karawang. Saya turut mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orangtua dan saudara/i, keluarga besar Anshori Djausal – Martinus dan Auw Boen Hai
2. Rektor, ibu Prof. Dr. Sri Mulyani, Ak., ACPA., CA.
3. Dosen penginspirasi dan penasihat, Prof. M Djaeni; Ir. Sufriadi Burhanuddin, M. Eng.; Sukanta, S.T., M.T.; dan Dr. Ir. Wagiono.
4. PT Temaru Engineering Indonesia (Muhamamd Hasyim, S.T., dan Agus Wato, S.E.)
5. Tim Kerja Merdeka Belajar Kampus Merdeka dan Tim Talenta Inovasi DIKTI Tahun 2021 (Iyan, Kamilah Pathun Ni'mah, Fitriah, Vina Syofiyatul Ulfa, Muhammad Arif Firdaus – sekaligus ketua Himatemia 2020-2021, Mohammad Ilham Fardiansyah)
6. Seluruh mahasiswa Teknik Kimia beserta pengurus Himpunan Mahasiswa Teknik Kimia (Himatemia Unsika)
7. Tim Kecil PHBD DIKTI Tahun 2017 (Riyant Irawan, Rosita Dewi, Sukma Tri Raharja, dan Wahyu Ferdiana Octavian – ketua Himtel 2018-2019)
8. Para dosen – Tendik se-Unsika



Teruslah berlari dan wujudkan mimpi
Teruslah berwisata dan jalan-jalan
Bhinneka Tunggal Ika – Hidup INDONESIA

KATA PENGANTAR

Puji Tuhan Yang Maha Kuasa telah memberikan kehidupan yang semakin menapak di penyelesaian buku kedua penulis dan kajiannya berkaitan Matematika Universitas. Topik Persamaan Diferensial Orde Satu menjadi lanjutan dari langkah inisiasi pembenahan pola pikir penyelesaian persoalan baik melalui variabel terpisah, homogen, maupun eksak. Hal ini diinspirasi oleh Tridharma Perguruan Tinggi (pengajaran) untuk menyederhanakan bagaimana langkah perbantuan bagi mahasiswa dalam menghadapi perkuliahan matematika.

Karya kedua ini akan terus berkelanjutan dengan topik sama maupun berbeda. Buku ini mampu memberikan kontribusi di bidang pendidikan dan pengajaran di program studi S-1 Teknik Kimia Universitas Singaperbangsa Karawang.

Karawang, 18 Desember 2021

Dessy Agustina Sari
(@Dessy Yu)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU: VARIABEL TERPISAH ...	1
$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{y}{x}$	2
$4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0$	3
$y \ln x = x \frac{dy}{dx}$	5
$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$	7
$xy' - y - x \sin \frac{y}{x} = 0$	18
 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU: HOMOGEN	23
$(x^2 - 3y^2) \, dx + 2xy \, dy = 0$	24
$y \ln x = x \frac{dy}{dx}$	29
$(\sqrt{x^2 - y^2} + y) \, dx - x \, dy = 0$	34
$2y e^{x/y} \, dx + (y - 2x e^{x/y}) \, dy = 0$	40
$xy' - y - x \sin \left(\frac{y}{x}\right) = 0$	46
$\frac{y}{x} \cos \left(\frac{y}{x}\right) \, dx - \left(\frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}\right) \, dy = 0$	52
$(x + y) \, dx + (x - y) \, dy = 0$	58
$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$	63
$2x^2 \, dx - 9y^2 \, dy = 0$	69
 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU: EKSAK DAN TIDAK EKSAK	74
$\cos y \, dx - (x \sin y - y^2) \, dy = 0$	75
$(x - 2xy + e^y) \, dx + (y - x^2 + x e^y) \, dy = 0$	81
$(x^3 + xy^2 \sin 2x + y^2 \sin^2 x) \, dx + (2xy \sin^2 x) \, dy = 0$	87
$4xy \, dx + (x^2 + 1) \, dy = 0$	97

$y \sec x \, dx + \sin x \, dy = 0$	117
$(e^x - \sin y) \, dx + \cos y \, dy = 0$	129
$2x \, dx + e^{x+y} \cos y \, dy = 0$	141

DAFTAR PUSTAKA

(RESUME)

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

1 VARIABEL TERPISAH

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0 \quad (\text{PD 1})$$

Bantuan pemisalan

$$y = ux \sim \frac{y}{x} = u$$

$$dy = u dx + x du$$

Pemisahan variabel x dengan dx , y terhadap dy , ataupun u terhadap du .

2 HOMOGEN

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0 \quad (\text{PD 1})$$

Bantuan pemisalan

$$y = ux \sim \frac{y}{x} = u$$

$$dy = u dx + x du$$

$$A(x, y) = x^n s(u) \text{ dan } B(x, y) = x^n t(u) \quad (\text{PD 2})$$

$$x^n s(u) dx + x^n t(u)(x du + u dx) = 0 \quad (\text{PD 3})$$

Perhatikan, bagian $s(u)$ dan $t(u)$ hanya memiliki variabel u atau hanya berupa konstanta di dalamnya. Dengan demikian, penggunaan (PD 4) untuk mendapatkan penyelesaian akhir dapat diterapkan.

$$\frac{1}{x} dx + \frac{t(u)}{s(u) + u t(u)} du = 0 \quad (\text{PD 4})$$

3 EKSAK

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (\text{E 1})$$

$$f(x, y) = \int_{x_0=0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0=0}^y Q(x_0, y)dy = \int 0 \quad (\text{E 2})$$

$$f(x, y) = \int_{y_0=0}^y Q(x, y)dy + \int_{x_0=0}^x P(x, y_0)dx = \int 0 \quad (\text{E 3})$$

3 TIDAK EKSAK MENUJU EKSAK

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Peninjauan (E 1)

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

$$W_1 = \frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q} \quad (\text{TE 1})$$

Faktor pengali ke soal yang diberikan untuk dibuktikan kembali sebagai PD Eksak

$$W_2 = \frac{\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}}{P} \quad (\text{TE 2})$$

Faktor pengali ke soal yang diberikan untuk dibuktikan kembali sebagai PD Eksak

$$f(x, y) \times e^{\int W_2 dy}$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

(persamaan pasca dikalikan faktor integrasi baik melalui W_1 maupun W_2 dan diuji kembali sebagai EKSAK).

Tabel 1. Aturan penurunan atau konsep turunan - integral	
$\sin E = \cos E \, dE$ $\cos F = -\sin F \, dF$ $\tan G = \sec^2 G \, dG$	$\cot H = -\operatorname{cosec}^2 H \, dH$ $\sec K = \sec K \tan K \, dK$ $\operatorname{cosec} L = -\operatorname{cosec} L \cot L \, dL$
$e^F = e^F dF$ $\ln G = \frac{1}{G} dG$ $\int U \, dV = UV - \int V \, dU$	$U + V = dU + dV$ $U - V = dU - dV$ $U \times V = V \, dU + U \, dV$ $U \div V = \frac{V \, dU - U \, dV}{V^2}$
Konsep Logaritma	
$\ln 1 = 0$ $\ln e = 1$ $\ln ax = \ln a + \ln x$	$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$ $\ln x^n = n \ln x$ $e^{\ln a} = a$

Tabel 2. Identitas dasar sinus dan cosinus		
$\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A$	$\frac{1}{\cos B} = \sec B$	$\frac{1}{\tan C} = \cot C$
$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ $\sin 4B = 2 \sin 2B \cos 2B$	$\tan 2E = \frac{2 \tan E}{1 - \tan^2 E}$ $\tan 8F = \frac{2 \tan 4F}{1 - \tan^2 4F}$	
$\cos 6D = \cos^2 3D - \sin^2 3D$ $\cos 6D = 2 \cos^2 3D - 1$ $\cos 6D = 1 - 2 \sin^2 3C$	$\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C$ $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1$ $\cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C$	
$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $\tan^2 B + 1 = \sec^2 B$ $1 + \cot^2 C = \operatorname{cosec}^2 C$	



1

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU: VARIABEL TERPISAH

Persoalan yang diberikan untuk mengasah kemampuan penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan pemisahan variabel berupa:

1.1. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{y}{x}$

1.2. $4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0$

1.3. $y \ln x = x \frac{dy}{dx}$

1.4. $e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$

1.5. $xy' - y - x \sin \frac{y}{x} = 0$

(Darmawijoyo, 2011; DA Sari, 2018).

Penyajian berikut memberikan langkah penyelesaian bagi pemula dengan memperhatikan konsep turunan, integral, dan identitas trigonometri.

PERSAMAAN DIFERENSIAL	No 1.1
Tentukan orde dari persamaan berikut	
$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{y}{x}$	

Penyelesaian:

BANTUAN PEMISALAN
$y = ux \sim \frac{y}{x} = u$

Selanjutnya, persamaan yang diberikan adalah

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{y}{x}$$

$$f(x, y) = (x^2 + \textcolor{red}{u}^2 \textcolor{red}{x}^2) \ln \frac{\textcolor{red}{u}x}{x}$$

$$f(x, y) = (x^2 + u^2 x^2) \ln u$$

$$f(x, y) = x^2(1 + u^2) \ln u$$

Diketahui dari persamaan (1) dan (2) bahwa	
$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$	(PD 1)
$A(x, y) = x^n s(u)$ dan $B(x, y) = x^n t(u)$	(PD 2)

dengan nilai n adalah orde dari persamaan diferensial

$$f(x, y) = x^{\textcolor{red}{2}}(1 + u^2) \ln u$$

Selanjutnya, nilai dari $x^{\textcolor{red}{n}} = x^{\textcolor{red}{2}}$ maka $\textcolor{red}{n} = \textcolor{red}{2}$ dan merupakan orde dari persamaan soal 1 yang diberikan.

Jika persamaan

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \frac{y}{x}$$

hendak diselesaikan menggunakan persamaan diferensial homogen maka merujuk kembali ke bentuk awalnya yang seharusnya pada (PD 1). Persamaan pada soal ini **bukanlah** merupakan **Persamaan Diferensial Homogen** dan juga bukanlah persamaan diferensial yang ditandai adanya dx , dy maupun turunan variabel lainnya.

PERSAMAAN DIFERENSIAL	No 1.2
Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut $4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0$	

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial, lakukan pemisahan variabel x dan y sesuai ruas kelompoknya dengan melakukan modifikasi.

$$4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0$$

$$4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0 \mid \div (\cos^2 y \operatorname{cosec}^2 x)$$

$$4 \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y \operatorname{cosec}^2 x} \, dx + \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cos^2 y \operatorname{cosec}^2 x} \, dy = \frac{0}{\cos^2 y \operatorname{cosec}^2 x}$$

$$4 \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} \, dx + \frac{1}{\cos^2 y} \, dy = 0$$

Pergunakan Tabel 2 untuk menangani bentuk lain dari aturan trigonometri.

Tabel 2. Identitas dasar sinus dan cosinus		
$\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A$	$\frac{1}{\cos B} = \sec B$	$\frac{1}{\tan C} = \cot C$

$$4 \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} \, dx + \frac{1}{\cos^2 y} \, dy = 0$$

$$4 \frac{1}{(1/\sin^2 x)} \, dx + (\sec^2 y) \, dy = 0$$

$$4 \sin^2 x \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

Modifikasi bentuk lain dari $\sin^2 x$ dan $\sec^2 x$ dengan disesuaikan kebutuhan dalam penyelesaian soal ini. Pilih data di Tabel 2 dengan menghindari trigonometri berpangkat seperti $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan^2 x$, dan $\cot^2 x$. Keempat hal tersebut menyulitkan ke proses integral dari suatu trigonometri.

Tabel 1. Aturan penurunan	
$\sin E = \cos E \, dE$	$\cot H = -\operatorname{cosec}^2 H \, dH$
$\cos F = -\sin F \, dF$	$\sec K = \sec K \tan K \, dK$
$\tan G = \sec^2 G \, dG$	$\operatorname{cosec} L = -\operatorname{cosec} L \cot L \, dL$

Tabel 2. Identitas dasar sinus dan cosinus	
$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ $\sin 4B = 2 \sin 2B \cos 2B$	$\tan 2E = \frac{2 \tan E}{1 - \tan^2 E}$ $\tan 8F = \frac{2 \tan 4F}{1 - \tan^2 4F}$
$\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C$ $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1$ $\cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C$	$\cos 6D = \cos^2 3D - \sin^2 3D$ $\cos 6D = 2 \cos^2 3D - 1$ $\cos 6D = 1 - 2 \sin^2 3C$

$$4 \sin^2 x \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$4 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$2(1 - \cos 2x) \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$2 \, dx - 2 \cos 2x \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

Pengintegralan membutuhkan bentuk lain dari $\cos 2x \, dx$

BANTUAN PEMISALAN
$M = 2x$ $dM = 2 \, dx$

$$2 \, dx - 2 \cos 2x \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$2 \, dx - \cos 2x (2 \, dx) + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$2 \, dx - \cos M (dM) + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$2 \int dx - \int \cos M \, dM + \int \sec^2 y \, dy = \int 0$$

$$2x - \sin M + \tan y = C$$

$$2x - \sin 2x + \tan y = C$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan diferensial dari

KESIMPULAN	
Soal $4 \cos^2 y \, dx + \operatorname{cosec}^2 x \, dy = 0$	Jawaban $2x - \sin 2x + \tan y = C$

PERSAMAAN DIFERENSIAL	No 1.3
Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut	
$y \ln x = x \frac{dy}{dx}$	

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini, lakukan pemisahan variabel x dan y sesuai ruas kelompoknya dengan melakukan modifikasi.

$$\begin{aligned}
 y \ln x &= x \frac{dy}{dx} \\
 y \ln x \, dx &= x \, dy \quad | \div xy \\
 \frac{y \ln x}{xy} \, dx &= \frac{x}{xy} \, dy \\
 \frac{1}{x} \ln x \, dx &= \frac{1}{y} \, dy
 \end{aligned}$$

Setelah dilakukan pemisahan variabel, langkah selanjutnya adalah pengintegralan karena di ruas dx hanya memiliki variabel x dan sebaliknya. Hal ini memenuhi penyelesaian **persamaan diferensial orde satu dengan metode pemisahan variabel**. Kemudian, pengintegralan bagian dx membutuhkan **Tabel 1** dan diturutsertakan bantuan berupa pemisalan.

Tabel 1. Aturan penurunan
$e^F = e^F dF$ $\ln G = \frac{1}{G} dG$

BANTUAN PEMISALAN
$K = \ln x$ $dK = \frac{1}{x} dx$

$$\frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$(\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$(K) dK = \frac{1}{y} \, dy$$

$$K \, dK - \frac{1}{y} \, dy = 0$$

$$\int K \, dK - \int \frac{1}{y} \, dy = \int 0$$

$$\frac{1}{2} K^2 - \ln y = C$$

$$\frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln y = C$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan diferensial dari

KESIMPULAN	
Soal $y \ln x = x \frac{dy}{dx}$	Jawaban $\frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln y = C$

PERSAMAAN DIFERENSIAL**No 1.4**

Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial, lakukan pemisahan variabel x dan y sesuai ruas kelompoknya dengan melakukan modifikasi. Kebutuhan *trial and error* dapat diterapkan untuk melihat berbagai kemungkinan penyelesaian soal ini.

Trial and error (1)

Langkah (1) ini menjadi dugaan dan pembuktian cara yang sesuai dengan teknik menurunkan atau mengintegalkan sebuah pemisalan persamaan.

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} \, dx + \frac{\cos y}{\tan y} \, dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$A = \sin y$$

$$dA = \cos y \, dy$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \cos y \frac{1}{\sin y} \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \cos y \, A \, dA = 0$$

Dari pemisalan $A = \sin y$ terhadap persoalan ini menginginkan variabel y berubah menjadi variabel A . Namun, bantuan tersebut memberikan sisa variabel y berupa $\cos y$. **Penyelesaian ini tidak dapat dilanjutkan.** Pengamat apabila tidak memahami ini akan menganggap bahwa $\cos y$ adalah konstanta karena di luar variabel A . Yang selanjutnya dilakukan adalah melakukan pemisalan lainnya ataupun modifikasi dengan memanfaatkan sifat trigonometri (tersaji pada Tabel 1 dan Tabel 2).

Trial and error (2)

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} \, dx + \frac{\cos y}{\tan y} \, dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$B = \cos y$$

$$dB = -\sin y \, dy$$

$$-\frac{dB}{\sin y} = dy$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos y}{\sin y} \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos y}{\sin y} B \left(-\frac{dB}{\sin y} \right) = 0$$

$$e^{x+1} \, dx - \frac{\cos y}{\sin^2 y} (B \, dB) = 0$$

Dari pemisalan $B = \cos y$ terhadap persoalan ini menginginkan variabel y berubah menjadi variabel B . Namun, bantuan tersebut memberikan sisa variabel y berupa $\cos y$ dan $\sin^2 y$. **Penyelesaian ini tidak dapat dilanjutkan.**

Trial and error (3)

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} \, dx + \frac{\cos y}{\tan y} \, dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

Tabel 2. Identitas dasar sinus dan cosinus

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $\tan^2 B + 1 = \sec^2 B$ $1 + \cot^2 C = \operatorname{cosec}^2 C$
--	---

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\sin^2 y}{\sin y} \right) dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) dy = 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$C = \sin y$$

$$dC = \cos y \, dy$$

$$\frac{dC}{\cos y} = dy$$

$$e^{x+1}dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y\right) dy = 0$$

$$e^{x+1}dx + \left(\frac{1}{C} - C\right) \frac{dC}{\cos y} = 0$$

Dari pemisalan $C = \sin y$ terhadap persoalan ini menginginkan variabel y berubah menjadi variabel C . Namun, bantuan tersebut memberikan sisa variabel y berupa $\cos y$. Selain itu, apabila nilai $(1/C) dC$ diintegalkan maka hasilnya berupa $\ln C$. Hal ini bertentangan dengan konsep trigonometri berikut.

Tabel 1. Aturan penurunan untuk trigonometri	
$\sin A = \cos A \, dA$	$\operatorname{cosec} D = -\operatorname{cosec} D \cot D \, dD$
$\cos B = -\sin B \, dB$	$\sec E = \sec E \tan E \, dE$
$\tan C = \sec^2 C \, dC$	$\cot F = -\operatorname{cosec}^2 F \, dF$

Kesalahannya di pemisalan tersebut adalah integral dari $(1/\sin y) dy$ dengan $(1/C) dC$. Hasil yang didapatkan berbeda dan mengabaikan sifat $\sin y \cos y \tan y$ ketika diturunkan ataupun diintegalkan. Ketika menangani sifat $\sin y$ maka hasilnya berupa $\cos y$, dan demikian sifat untuk $\cos y$ dan $\tan y$ (**Konsep Sifat Trigonometri**, tersaji pada Tabel 1 dan Tabel 2). **Penyelesaian ini tidak dapat dilanjutkan.**

Trial and error (4)

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} \, dx + \frac{\cos y}{\tan y} \, dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\sin^2 y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) \, dy = 0$$

Tabel 2. Identitas dasar sinus dan cosinus

$\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A$	$\frac{1}{\cos B} = \sec B$	$\frac{1}{\tan C} = \cot C$
---	-----------------------------	-----------------------------

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + (\operatorname{cosec} y - \sin y) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \operatorname{cosec} y \, dy - \sin y \, dy = 0$$

$$\int e^{x+1} \, dx + \int \operatorname{cosec} y \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

Dari Tabel 1, pengintegralan $\operatorname{cosec} y \, dy$ mengalami kesulitan karena hasil integral tidak tersaji dari sifat trigonometri tersebut. Lakukan bantuan lainnya berupa pemisalan untuk mengupayakan penyelesaian.

BANTUAN PEMISALAN

$$D = \operatorname{cosec} y$$

$$dD = -\operatorname{cosec} D \cot D \, dy$$

$$\frac{dD}{-\operatorname{cosec} D \cot D} = dy$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \operatorname{cosec} y \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \operatorname{cosec} y \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int D \left(\frac{dD}{-\operatorname{cosec} D \cot D} \right) - \int \sin y \, dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \left(-\frac{1}{\operatorname{cosec} D \cot D} \right) D \, dD - \int \sin y \, dy = \int 0$$

Hasil ini menimbulkan permasalahan baru karena proses pengintegralan berupa 2 komponen, D , dan $(1/\operatorname{cosec} D \cot D)$ terhadap variabel D . **Penyelesaian ini tidak dapat dilanjutkan.**

Trial and error (5)

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y \, dx + \cos y \, dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} \, dx + \frac{\cos y}{\tan y} \, dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\sin^2 y}{\sin y} \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) \, dy = 0$$

$$e^{x+1} \, dx + \operatorname{cosec} y \, dy - \sin y \, dy = 0$$

$$\int e^{x+1} \, dx + \int \operatorname{cosec} y \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec} y \times \frac{\operatorname{cosec} y + \cot y}{\operatorname{cosec} y + \cot y} \\ & \frac{\operatorname{cosec}^2 y + \operatorname{cosec} y \cot y}{\operatorname{cosec} y + \cot y} \end{aligned}$$

$$\int e^{x+1} \, dx + \int \operatorname{cosec} y \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} \, dx + \int \left(\frac{\operatorname{cosec}^2 y + \operatorname{cosec} y \cot y}{\operatorname{cosec} y + \cot y} \right) \, dy - \int \sin y \, dy = \int 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{cosec} y + \cot y \\ dE &= (-\operatorname{cosec} y \cot y \, dy) + (-\operatorname{cosec}^2 y \, dy) \\ dE &= -(\operatorname{cosec}^2 y + \operatorname{cosec} y \cot y) \, dy \\ -dE &= (\operatorname{cosec}^2 y + \operatorname{cosec} y \cot y) \, dy \end{aligned}$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \left(\frac{\text{cosec}^2 y + \text{cosec } y \cot y}{\text{cosec } y + \cot y} \right) dy - \int \sin y dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \left(\frac{1}{\text{cosec } y + \cot y} \right) (\text{cosec}^2 y + \text{cosec } y \cot y dy) - \int \sin y dy = \int 0$$

Bentuk ini telah mencapai tahapan pemisahan variabel x dan y .

$$\int e^{x+1} dx + \int \left(\frac{1}{\text{cosec } y + \cot y} \right) (\text{cosec}^2 y + \text{cosec } y \cot y dy) - \int \sin y dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \left(\frac{1}{E} \right) (-dE) - \int \sin y dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx - \int \frac{1}{E} dE - \int \sin y dy = \int 0$$

BANTUAN PEMISALAN

$$F = x + 1$$

$$dF = (1 + 0)dx$$

$$dF = dx$$

$$\int e^{x+1} dx - \int \frac{1}{E} dE - \int \sin y dy = \int 0$$

$$\int e^{x+1} dx - \int \frac{1}{E} dE - \int \sin y dy = \int 0$$

$$\int e^F dF - \int \frac{1}{E} dE - \int \sin y dy = \int 0$$

Tabel 1. Aturan penurunan

$$e^F = e^F dF$$

$$\ln G = \frac{1}{G} dG$$

$$\int e^F dF - \int \frac{1}{E} dE - \int \sin y dy = \int 0$$

$$e^F - \ln E - (-\cos y) = C$$

$$e^{x+1} - \ln(\operatorname{cosec} y + \cot y) + \cos y = C$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan diferensial dari

KESIMPULAN (TRIAL AND ERROR 5)	
Soal $e^{x+1} \tan y dx + \cos y dy = 0$	Jawaban $e^{x+1} - \ln(\operatorname{cosec} y + \cot y) + \cos y = C$

Trial and error (6)

$$e^{x+1} \tan y dx + \cos y dy = 0$$

$$e^{x+1} \tan y dx + \cos y dy = 0 \mid \div \tan y$$

$$e^{x+1} \frac{\tan y}{\tan y} dx + \frac{\cos y}{\tan y} dy = \frac{0}{\tan y}$$

$$e^{x+1} dx + \left(\cos y \times \frac{\cos y}{\sin y} \right) dy = 0$$

$$e^{x+1} dx + \frac{\cos^2 y}{\sin y} dy = 0$$

$$e^{x+1} dx + \frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} dy = 0$$

$$e^{x+1} dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\sin^2 y}{\sin y} \right) dy = 0$$

$$e^{x+1} dx + \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right) dy = 0$$

$$\int e^{x+1} dx + \int \frac{1}{\sin y} dy - \int \sin y dy = \int 0$$

BANTUAN PEMISALAN	
$\frac{\frac{1}{\sin y} dy}{\frac{\sin y}{\sin^2 y}} dy = \frac{\sin y}{1 - \cos^2 y} dy$	$\begin{aligned} S &= \cos y \\ dS &= -\sin y dy \\ -dS &= \sin y dy \end{aligned}$