

Pengantar Metode Optimasi

Prof. H. Sugiyarto, M.Si., Ph.D.
Anggi Setyawan, S.Si.
Galang Suryasaputra, S.Si.



PENGANTAR METODE OPTIMASI

Prof. H. Sugiyarto, M.Si., Ph.D.
Anggi Setyawan, S.Si.
Galang Suryasaputra, S.Si.



PENGANTAR METODE OPTIMASI

Penulis:
Prof. H. Sugiyarto, M.Si., Ph.D.
Anggi Setyawan, S.Si.
Galang Suryasaputra, S.Si.

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Desember 2023

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023
; 21 x 29 cm
ISBN : 978-623-448-791-6

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

Kata Pengantar

Bismillahirrahmanirrahiim

Puji syukur Alhamdulillah penyusun panjatkan kepada Allah SWT atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga penyusun dapat menyelesaikan Buku dengan judul “Pengantar Metode Optimasi”. Buku ini digunakan sebagai salah satu pegangan untuk mata kuliah Pemodelan Matematika.

Penyusun menyadari bahwa buku ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan buku ini. Akhir kata, penyusun berharap semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Matematika

Yogyakarta, 2023

Penyusun

Daftar isi

PENGANTAR METODE OPTIMASI.....	i
Kata Pengantar	ii
Daftar isi	iii
BAB 1 Metode Pembuktian dan Beberapa Notasi	1
1.1 Metode Pembuktian.....	1
1.2 Notasi	4
BAB 2 Ruang Vektor dan Matriks.....	7
2.1 Ruang Vektor	7
2.2 Tingkatan Matriks	12
2.3 Persamaan Linear	17
2.4 Perkalian Titik dan Aturannya	20
BAB 3 Transformasi	29
3.1 Transformasi Linear	29
3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	30
3.3 Ortogonal Proyeksi	33
3.4 Bentuk Kuadrat	34
3.5 Norma Matriks	39
BAB 4 Konsep Geometri	51
4.1 Ruang Garis	51
4.2 Hyperplanes dan Varietas linear	51
4.3 Himpunan Cembung.....	54
4.4 Lingkungan.....	56
4.5 Polytopes dan Polyhedra	58
BAB 5 Elemen Kalkulus.....	62
5.1 Baris dan Limit	62
5.2 Differensibilitas	71
5.3 Matriks Derivatif	72
5.4 Aturan Diferensiasi.....	75
5.5 Tingkatan Himpunan dan Gradien	77

5.6	Deret Taylor	81
BAB 6	Konsep Matematika dalam Optimasi.....	92
6.1	Konsep Dasar Optimasi	92
6.2	Vektor Gradien fx	93
6.3	Matriks Hessian dari fx	93
6.4	Kondisi Peminimum Lokal	97
BAB 7	Optimasi Tanpa Kendala	109
7.1	Fungsi Univariat	109
7.2	Fungsi Multivariat	113
BAB 8	Metode Pencarian Satu Dimensi.....	116
8.1	Pengantar Plot Grafik <i>Non Linear</i>	116
8.2	Metode <i>Golden Section Search</i>	117
8.3	Barisan Fibonacci	119
8.4	Metode Biseksi/Metode Bagi Dua	121
8.5	Metode Newton	122
BAB 9	Algoritma Machine Learning	126
9.1	Data Mining	126
9.1.1	Hierarchy Clustering	126
9.1.2	K-Means Clustering	127
9.1.3	Jarak metrik	128
9.2	Data Mining untuk Big Data	129
9.3	Artificial Neural Networks (Jaringan Syaraf Tiruan)	133
9.3.1	Model Neuron	134
9.3.2	Neural Networks	135
9.3.3	Algoritma Back Propagation	138
9.3.4	Fungsi Kerugian ANN	139
9.3.5	Turunan Gradien Stokastik	140
9.3.6	Boltzmann Terbatas	141
9.4	<i>Support Vector Machines (SVM)</i>	142

BAB 10 Masalah Optimasi dengan Kendala Berupa Persamaan	149
10.1 Metode Pengali Lagrange.....	149
10.2 Masalah Fungsi Penalty.....	160
BAB 11 Masalah Optimasi dengan Kendala Berupa Pertidaksamaan Kondisi Karush-Kuhn-	
Tucker	169
Daftar Pustaka	175
Simulasi Menggunakan Python	180

BAB 1

Metode Pembuktian dan Beberapa

Notasi

1.1 Metode Pembuktian

Perhatikan dua pernyataan " A " dan " B ", yang mana keduanya dapat bernilai benar dan salah. Sebagai contoh, misalkan " A " adalah pernyataan "John adalah mahasiswa teknik", dan " B " adalah pernyataan "John mengambil mata kuliah optimisasi." Kedua pernyataan dapat digabungkan menjadi pernyataan lain seperti, " A dan B " atau " A atau B ". Pada contoh, " A " dan " B " berarti "John adalah mahasiswa teknik, dan dia mengambil mata kuliah optimisasi." Kita juga dapat membentuk pernyataan seperti "*bukan A*", "*bukan B*", "*bukan (A dan B)*", dan seterusnya. Untuk contoh, "*bukan A*" berarti "John bukan mahasiswa teknik." Kebenaran atau kesalahan dari pernyataan gabungan tergantung pada kebenaran atau kesalahan pernyataan asli, " A dan B ." Hubungan ini dinyatakan dengan tabel kebenaran; lihat **Tabel 1.1 dan 1.2**.

Dari **Tabel 1.1 dan 1.2**, mudah untuk dilihat bahwa pernyataan "*bukan (A dan B)*" adalah setara dengan "*(bukan A)* atau *(bukan B)*" (lihat Latihan 1.3). Ini disebut hukum *DeMorgan*. Dalam membuktikan pernyataan, akan lebih mudah untuk mengungkapkan pernyataan gabungan dengan kondisional, seperti " A menyiratkan B ," yang kami nyatakan sebagai " $A \Rightarrow B$." Kondisional " $A \Rightarrow B$ " hanyalah pernyataan gabungan "*(bukan A) atau B*," dan sering juga dibaca " A hanya jika B ," atau "jika A maka B ", atau " A cukup untuk B ", atau " B diperlukan untuk A ".

Kita dapat menggabungkan dua pernyataan bersyarat untuk membentuk pernyataan bikondisional dari bentuk " $A \Leftrightarrow B$," yang berarti " $(A \Rightarrow B)$ dan $(B \Rightarrow A)$ ". Pernyataan " $A \Leftrightarrow B$ " berbunyi "A jika dan hanya jika B", atau "A setara dengan B," atau "A diperlukan dan cukup untuk B." Tabel kebenaran untuk pernyataan bersyarat dan bikondisional diberikan pada **Tabel 1.3**.

Tabel 1.1 Tabel Kebenaran untuk " A dan B " dan " A atau B "

A	B	A dan B	A atau B
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

Tabel 1.2 Tabel Kebenaran untuk "*bukan A*"

A	Bukan A
F	T
T	F

Tabel 1.3 Tabel Kebenaran untuk Kondisional dan Bikondisional

A	B	$A \Rightarrow B$	A	$A \Leftrightarrow B$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

Sangat mudah untuk memverifikasi, dengan menggunakan tabel kebenaran, bahwa pernyataan " $A \Rightarrow B$ " setara dengan pernyataan " $(\textit{bukan B}) \Rightarrow (\textit{bukan A})$ ". Yang terakhir disebut kontrapositif dari yang pertama.

Jika kita mengambil kontraposisif dengan Hukum DeMorgan, kita memperoleh pernyataan bahwa " $\text{bukan}(A \text{ atau } B)$ " sama dengan " $(\text{bukan } A) \text{ dan } (\text{bukan } B)$ ".

Sebagian besar pernyataan yang diselesaikan memiliki bentuk " $A \Rightarrow B$ ". Untuk membuktikan pernyataan seperti itu, kita dapat menggunakan salah satu dari tiga teknik berbeda berikut:

1. Metode langsung
2. Bukti dengan kontraposisi
3. Buktikan dengan kontradiksi atau *reductio ad absurdum*.

Dalam kasus metode langsung, kita mulai dengan " A ", kemudian menyimpulkan rantai berbagai konsekuensi untuk diakhiri dengan " B ".

Metode yang berguna untuk membuktikan pernyataan adalah pembuktian dengan kontraposisi, berdasarkan ekivalensi pernyataan " $A \Rightarrow B$ " dan " $(\text{bukan } B) \Rightarrow (\text{bukan } A)$ ". Kita mulai dengan " $\text{bukan } B$ ", kemudian simpulkan berbagai konsekuensi untuk diakhiri dengan " $\text{bukan } A$ " sebagai kesimpulan. Metode pembuktian lain yang kita gunakan adalah pembuktian dengan kontradiksi, berdasarkan ekivalensi pernyataan " $A \Rightarrow B$ " dan " $\text{bukan } (A \text{ dan } (\text{bukan } B))$." Di sini kita mulai dengan " $A \text{ dan } (\text{bukan } B)$ " dan turunkan kontradiksi.

Metode pembuktian lain yang kita gunakan adalah pembuktian dengan kontradiksi, berdasarkan ekivalensi pernyataan " $A \Rightarrow B$ " dan " $\text{bukan } (A \text{ dan } (\text{bukan } B))$." Di sini kita mulai dengan " $A \text{ dan } (\text{bukan } B)$ " dan turunkan kontradiksi. Terkadang, kami menggunakan prinsip induksi untuk membuktikan pernyataan. Prinsip ini dapat dinyatakan sebagai berikut. Asumsikan bahwa properti tertentu dari bilangan bulat positif memenuhi kondisi berikut:

- Bilangan 1 memiliki sifat ini
- Jika bilangan n memiliki sifat ini, maka bilangan $n + 1$ juga memilikinya.

Prinsip induksi menyatakan bahwa di bawah asumsi ini setiap bilangan bulat positif memiliki sifat.

Prinsip induksi mudah dipahami dengan menggunakan argumen intuitif berikut. Jika angka 1 memiliki sifat yang diberikan maka kondisi kedua menyiratkan bahwa angka 2 memiliki

properti. Tetapi, sekali lagi, kondisi kedua menyiratkan bahwa angka 3 memiliki sifat ini, dan seterusnya. Prinsip induksi adalah pernyataan formal dari penalaran intuitif ini.

1.2 Notasi

Jika X adalah himpunan, maka dapat dituliskan $x \in X$ yang berarti x adalah anggota X . Jika x bukan anggota himpunan X , ditulis $x \notin X$. Kami juga menggunakan "notasi kurung kurawal" untuk himpunan, dengan menuliskan beberapa elemen pertama dari suatu himpunan diikuti oleh tiga titik. Misalnya, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ adalah himpunan yang memuat elemen x_1, x_2, x_3 , dan seterusnya. Atau, kita dapat secara eksplisit menunjukkan hukum pembentukan. Misalnya, $\{x : x \in \mathbb{R}, x > 5\}$ berbunyi "kumpulan semua x sedemikian sehingga x adalah bilangan real dan x lebih besar dari 5". Tanda titik dua setelah x berbunyi "sedemikian sehingga". Notasi alternatif untuk himpunan yang sama adalah $\{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$.

Jika X dan Y himpunan, maka dapat dituliskan $X \subset Y$ yang berarti bahwa setiap elemen X juga sebuah elemen dari Y . Dalam hal ini, kita katakan bahwa X adalah himpunan bagian dari Y . Jika X dan Y adalah himpunan, maka kita tunjukkan dengan $X \setminus Y$ (" X dikurangi Y ") himpunan semua titik di X yang tidak ada di Y . Perhatikan bahwa $X \setminus Y$ adalah himpunan bagian dari X . Notasi $f : X \rightarrow Y$ berarti " f adalah fungsi dari himpunan X ke himpunan Y ". Simbol $:=$ menunjukkan tugas aritmatika. Jadi, pernyataan dalam bentuk $x := y$ berarti " x menjadi y ." Simbol $\triangleq$ berarti "sama dengan menurut definisi."

Latihan Soal:

1.1 Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan " $(\text{bukan } B) \Rightarrow (\text{bukan } A)$ ", dan gunakan untuk menunjukkan bahwa pernyataan ini setara dengan pernyataan " $A \Rightarrow B$."

Penyelesaian:

A	B	Bukan A	Bukan B	AB	(bukan B) (bukan A)
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

1.2 Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan “bukan (A dan (bukan B))”, dan gunakan untuk tunjukkan bahwa pernyataan ini ekuivalen dengan pernyataan " $A \Rightarrow B$."

Penyelesaian:

A	B	Bukan A	Bukan B	AB	Bukan(A dan (bukan B))
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

1.3 Buktikan Hukum *De Morgan* dengan membuat tabel kebenaran yang sesuai.

Penyelesaian:

A	B	Bukan (A dan B)	Bukan A	Bukan B	(bukan A) atau (bukan B)
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F

1.4 Buktikan bahwa untuk setiap pernyataan A dan B, kita memiliki " $A \Leftrightarrow (A \text{ dan } B)$ atau (A dan (bukan B))." Ini berguna karena memungkinkan kita untuk membuktikan pernyataan A dengan membuktikan keduanya kasus terpisah "(A dan B)," dan "(A dan (bukan B))." Misalnya, untuk membuktikan bahwa $|x| \geq x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, kita buktikan secara terpisah kasus " $|x| > x$ dan $x > 0$," dan " $|x| > x$ dan $x < 0$." Membuktikan kedua kasus ternyata lebih mudah daripada membuktikan langsung pernyataan $|x| \geq x$ (lihat Bagian 2.4 dan Latihan 2.4)

Penyelesaian:

A	B	A dan B	A dan (bukan B)	(A dan B) atau (A dan (bukan B))
F	F	F	F	F
F	T	F	F	F

T	F	F	T	T
T	T	T	F	T

1.5 (Latihan ini diambil dari [17, hlm. 80-81]) Misalkan Anda diberikan empat kartu, disusun berjajar. Setiap kartu memiliki huruf di satu sisi dan angka di sisi lain. Di sisi kartu yang terlihat dicetak simbol: Tentukan kartu mana yang harus Anda balikkan untuk memutuskan apakah aturan berikut ini benar atau salah: "Jika ada vokal di satu sisi kartu, maka ada angka genap sisi lain."

Penyelesaian:

Kartu yang harus balikkan adalah 3 dan A. Kartu yang tersisa tidak relevan dengan kebenaran atau kepalsuan aturan. Kartu dengan S tidak relevan karena S bukan vokal. Kartu dengan 8 tidak relevan karena aturan tidak mengatakan bahwa jika sebuah kartu memiliki nomor genap di satu sisi, maka ia memiliki vokal di sisi lain. Membalik kartu A secara langsung memverifikasi aturan, sementara membalik kartu 3 memverifikasi kontraposisi.

BAB 2

RUANG VEKTOR DAN MATRIKS

2.1 Ruang Vektor

Kita definisikan bahwa n -vektor kolom menjadi n -array dinotasikan oleh :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Bilangan a_i disebut sebagai komponen ke- i dari vektor $\mathbf{a}$. Himpunan bilangan real dinotasikan dengan $\mathbb{R}$, dan himpunan dari n -vektor kolom dengan komponennya adalah bilangan real dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$. Kita sebut $\mathbb{R}^n$ sebagai ruang vektor berdimensi n . Kita biasa menyatakan elemen $\mathbb{R}^n$ dengan menggunakan huruf kecil yang dicetak tebal, misalnya, $\mathbf{x}$. Komponen dari $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $x_1, \dots, x_n$.

Kita definisikan n -vektor baris sebagai berikut :

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Transpos dari vektor kolom yang diberikan $\mathbf{a}$ adalah vektor panah dengan elemen yang sesuai, dilambangkan dengan $\mathbf{a}^T$. Misalnya, jika

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Sedemikian sehingga secara ekuivalen, kita dapat menuliskannya $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$. Dua vektor misalnya $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ dan $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ adalah ekuivalen jika $a_i = b_i$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Jumlah dari vektor $\mathbf{a}$ dan vektor $\mathbf{b}$, dinotasikan dengan $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, sedemikian sehingga vektornya dapat diuraikan menjadi

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]^T$$

Operasi penjumlahan vektor memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1) Komutatif :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

2) Asosiatif :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

3) Vektor Nol

$$\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$$

Sedemikian sehingga

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Vektor

$$[a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n]^T$$

Disebut selisih antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$, dan dinotasikan dengan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{0} - \mathbf{b}$ dapat dinotasikan dengan $-\mathbf{b}$. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} - (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} \quad -(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Vektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ adalah solusi tunggal dari persamaan vector

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Sesungguhnya, misalkan $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ adalah solusi untuk $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Maka

$$a_1 + x_1 = b_1, a_2 + x_2 = b_2, \dots, a_n + x_n = b_n$$

Dengan demikian

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Kita definisikan operasi perkalian dari vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ terhadap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\alpha \mathbf{a} = [\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n]^T$$

Operasi tersebut mengikuti sifat-sifat berikut :

1) Distributif : untuk setiap skalar α dan β ,

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$$

2) Asosiatif:

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$$

3) Skalar 1 memenuhi:

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

4) Setiap skalar α memenuhi

$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

5) Skalar 0 memenuhi :

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

6) Skalar -1 memenuhi:

$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

Ingat bahwa $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\alpha = 0$ atau $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Untuk itu, perhatikan bahwa $\alpha\mathbf{a} = 0$ adalah ekuivalen dengan $\alpha a_1 = \alpha a_2 = \dots = \alpha a_n = 0$. Jika $\alpha = 0$ atau $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, maka $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Jika $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, maka setidaknya satu dari komponen tersebut $a_k \neq 0$. Untuk komponen ini, $\alpha a_k = 0$, dan karenanya kita harus memiliki $\alpha = 0$. Argumen serupa juga dapat diterapkan pada kasus saat $\alpha \neq 0$.

Sebuah himpunan vektor $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ adalah dikatakan bebas linear jika persamaan

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Menunjukkan bahwa seluruh koefisien α_i , dengan $i = 1, \dots, k$ adalah sama dengan nol. Himpunan vektor $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ bergantung linier jika tidak bebas linier.

Perhatikan bahwa himpunan yang tersusun dari vektor tunggal $\mathbf{0}$ adalah tidak bebas linear, jika $\alpha \neq 0$ maka $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Sesungguhnya, setiap himpunan dari vektor yang memuat $\mathbf{0}$ adalah tidak bebas linear. Sebuah himpunan yang tersusun dari vektor tunggal tak nol $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ adalah bebas linear saat $\alpha\mathbf{a} = 0$ yang berarti $\alpha = 0$.

Sebuah vektor $\mathbf{a}$ dapat dikatakan menjadi kombinasi linear dari vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ jika terdapat skalar $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k$$

Proposisi 2.1 Sebuah himpunan dari vektor $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ adalah tidak bebas linear jika dan hanya jika salah satu vektor dari himpunan adalah kombinasi linear.

Bukti. Jika $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ adalah tidak bebas linear maka

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Dimana setidaknya terdapat satu dari skalar $\alpha_i \neq 0$, sehingga

$$a_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} a_k$$

Misalkan bahwa

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_k a_k$$

Maka

$$(-1)a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0$$

Oleh karena skalar pertama adalah bukan nol, himpunan vektor $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ adalah tidak bebas linear. Argumen yang sama juga berlaku jika a_i , dengan $i = 2, \dots, k$, adalah kombinasi linear.

Himpunan bagian v dari $\mathbb{R}^n$ dikatakan sub-ruang dari $\mathbb{R}^n$ jika v adalah tertutup pada operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Maka dari itu, jika a dan b adalah vektor pada v , maka vektor $a + b$ dan αa juga pada v untuk setiap skalar α .

Setiap sub-ruang memuat nol vektor 0 , jika a adalah elemen dari sub-ruang, maka $(-1)a = -a$. Oleh karenanya, $a - a = 0$ juga bagian dari sub-ruang.

Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_k$ menjadi vektor yang berubah-ubah di $\mathbb{R}^n$. Himpunan dari seluruh kombinasi linearnya disebut span dari $a_1, a_2, \dots, a_k$ dan dinotasikan sebagai berikut :

$$\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_k] = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Diberikan sebuah vektor a , sub-ruang $\text{span}[a]$ memuat vektor αa , dimana α adalah bilangan real yang berubah-ubah ($\alpha \in \mathbb{R}$). Perhatikan juga bahwa jika a adalah kombinasi linear dari $a_1, a_2, \dots, a_k$ maka

$$\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_k, a] = \text{span}[a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Span dari setiap himpunan vektor adalah sub-ruang.

Diberikan sub-ruang v , setiap himpunan vektor bebas linear $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset v$ sedemikian sehingga $v = \text{span}[a_1, a_2, \dots, a_k]$ disebut sebagai basis dari sub-ruang v . Semua basis dari sub-ruang v memuat vektor bilangan yang sama. Bilangan ini disebut dimensi dari v , dinotasikan dengan $\dim v$.

Proposisi 2.2 Jika $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ adalah sebuah basis dari v , maka setiap vektor a dari v direpresentasikan tunggal sebagai

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

dimana $\alpha_i \in \mathbb{R}$, dengan $i = 1, 2, \dots, k$.

Bukti. Untuk membuktikan representasi tunggal dari a berkenaan dengan basis vektor, asumsikan bahwa

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

Dan

$$a = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k$$

Sekarang kita tunjukkan bahwa $\alpha_i = \beta_i$, dengan $i = 1, \dots, k$. Kita memiliki

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k$$

Atau

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)a_k = 0$$

Karena himpunan $\{a_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ adalah bebas linear, $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_k - \beta_k = 0$, maka, $\alpha_i = \beta_i$, dengan $i = 1, \dots, k$.

Misalkan kita memiliki sebuah basis $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ dari v dan sebuah vektor $a \in v$ maka

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

Koefisien α_i , dengan $i = 1, \dots, k$, disebut koordinat dari a dengan memperhatikan basis $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Basis natural untuk $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan vector

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alasan untuk menyebut vektor-vektor tersebut sebagai basis natural adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Kita juga dapat mendefinisikan ruang vektor kompleks. Untuk itu, misalkan $\mathbb{C}$ menunjukkan himpunan bilangan kompleks, dan $\mathbb{C}^n$ adalah himpunan n-vektor kolom dengan komponen bilangan kompleks. Hal ini dapat di verifikasi sendiri, himpunan $\mathbb{C}^n$ memiliki sifat yang mirip dengan $\mathbb{R}^n$, dimana skalar dapat diambil dari bilangan kompleks

2.2 Tingkatan Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi ataupun persegi panjang, biasanya dilambangkan dengan huruf kapital yang tebal misal nya **A**. Suatu matriks dengan m baris dan n kolom disebut dengan matriks $m \times n$, dan dinotasikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mari kita notasikan kolom ke k dari matriks A dengan a_k , maka dari itu

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

Jumlah maksimal kolom bebas linear dari matriks A disebut tingkat dari matriks A , dinotasikan dengan $\text{rank } A$. Perhatikan bahwa tingkat A adalah dimensi dari $\text{span}[a_1, \dots, a_n]$.

Proposisi 2.3 Tingkat dari matriks A adalah invarian pada operasi berikut ini :

- 1) Perkalian kolom matriks A dengan skalar tak nol
 - 2) Pertukaran kolom
 - 3) Penambahan ke kolom tertentu merupakan kombinasi linear dari kolom lainnya
-

Bukti.

- 1) Misalkan $b_k = \alpha_k a_k$, dimana $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, dan misalkan $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$.
Terlihat jelas bahwa

$$\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_n] = \text{span}[b_1, b_2, \dots, b_n]$$

sehingga

$$\text{rank } A = \text{rank } B$$

- 2) Banyaknya vektor bebas linear tidak bergantung pada ordonya
- 3) Misalkan

$$b_1 = a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$$

$$b_2 = a_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_n$$

Jadi, untuk setiap $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \alpha_1 a_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 c_2) a_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_1 c_n) a_n$$

dan karena,

$$\text{span}[b_1, b_2, \dots, b_n] \subset \text{span}[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Dilain sisi

$$a_1 = b_1 - c_2 b_2 - \dots - c_n b_n$$

$$a_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = b_n$$

Karena,

$$\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_n] \subset \text{span}[b_1, b_2, \dots, b_n]$$

Oleh karena itu,

$$\text{rank } A = \text{rank } B$$

Berkaitan dengan setiap persegi $(n \times n)$ matriks A adalah skalar yang disebut determinan dari matriks A , dinotasikan dengan $\det A$ atau $|A|$. Determinan matriks persegi adalah fungsi dari kolom-kolomnya dan memiliki sifat-sifat berikut :

- 1) Determinan matriks $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ adalah fungsi linear setiap kolom, maka dari itu

$$\begin{aligned} \det[a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha a_k^{(1)} + \beta a_k^{(2)}, a_{k+1}, \dots, a_n] &= \alpha \det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_k^{(1)}, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &+ \beta \det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_k^{(2)}, a_{k+1}, \dots, a_n] \end{aligned}$$

Untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a_k^{(1)}, a_k^{(2)} \in \mathbb{R}^n$

- 2) Jika untuk beberapa k kita memiliki $a_k = a_{k+1}$, maka

$$\det A = \det[a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = \det[a_1, \dots, a_k, a_k, \dots, a_n] = 0$$

- 3) Misalkan

$$I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dimana $\{e_1, \dots, e_n\}$ adalah basis natural untuk $\mathbb{R}^n$. Kemudian,

$$\det I_n = 1$$

Perhatikan bahwa jika $\alpha = \beta = 0$ pada sifat 1, maka

$$\det[a_1, \dots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots, a_n] = 0$$

Jadi, jika salah satu kolom adalah 0, maka determinannya sama dengan nol.

Determinan tidak mengubah nilainya jika kita menambahkan ke kolom-kolom lain dikalikan dengan skalar. Ini mengikuti dari sifat 1 dan sifat 2 seperti yang ditunjukkan di bawah ini :

$$\begin{aligned}\det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \alpha a_j, a_{k+1}, \dots, a_j] &= \det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_j] + \\ &\quad \alpha \det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_j, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, \dots, a_n]\end{aligned}$$

Namun, determinan berubah tandanya jika kita menukar kolom. Untuk menunjukkan sifatnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}&= \det[a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = \det[a_1, \dots, a_k + a_{k+1}, a_{k-1}, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, \dots, a_k + a_{k+1}, a_{k-1} - (a_k + a_{k+1}), \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, \dots, a_k + a_{k+1}, -a_k, \dots, a_n] \\ &= -\det[a_1, \dots, a_k + a_{k+1}, a_k, \dots, a_n] \\ &= -(\det[a_1, \dots, a_k, a_k, \dots, a_n] + \det[a_1, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n]) \\ &= -\det[a_1, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n]\end{aligned}$$

Proposisi 2.4 Jika $m \times n$ ($m \geq n$) matriks A memiliki minor orde ke- n bukan nol, maka kolom-kolom dari A adalah bebas linear, yakni, $\text{rank } A = n$

Bukti. Misalkan A memiliki minor orde ke- n bukan nol. Kita asumsikan bahwa minor orde ke- n yang bersesuaian dengan n baris pertama A adalah bukan nol.

Misalkan x_i , dengan $i = 1, \dots, n$, adalah skalar sedemikian sehingga

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$$

Persamaan vektor di atas ekuivalen dengan himpunan persamaan m berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{array}$$

Untuk $i = 1, \dots, n$, misalkan

$$\tilde{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

Maka, $x_1\tilde{a}_1 + \cdots + x_n\tilde{a}_n = 0$

Minor orde ke- n adalah $\det[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n]$ diasumsikan tak nol. Dari sifat-sifat determinan maka kolom $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ adalah bebas linear. Karena itu, semua $x_i = 0$, dengan $i = 1, \dots, n$. Karenanya, kolom $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bebas linear.

Dari persamaan di atas, jika ada minor bukan nol, maka kolom terkait dengan minor bukan nol ini adalah bebas linear.

Jika suatu matriks A memiliki minor orde ke- r $|M|$ dengan sifat (i) $|M| \neq 0$ dan (ii) setiap minor dari A yang dibentuk dengan menambahkan baris dan kolom A ke M adalah nol, maka

$$\text{rank } A = r$$

Jadi, tingkat suatu matriks adalah sama dengan orde tertinggi dari minor tak nol.

Matriks nonsingular adalah matriks persegi yang determinannya adalah tak nol

Misalkan A adalah matriks persegi $n \times n$. Maka, A nonsingular jika dan hanya jika

Ada $n \times n$ matriks B lain sedemikian sehingga

$$AB = BA = I_n$$

Dimana I_n menotasikan atau menunjukkan identitas matriks $n \times n$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kita sebut matriks B diatas sebagai invers dari A , dan dituliskan $B = A^{-1}$.

Diberikan matriks $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Transpose dari A dinotasikan dengan A^T , matriks $n \times m$ adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa kolom matriks A adalah baris matriks A^T , demikian juga berlaku sebaliknya.

Matriks A adalah simetris jika $A = A^T$

2.3 Persamaan Linear

Misalkan kita memiliki m persamaan dalam n yang tidak diketahui bentuknya

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Kita dapat merepresentasikan himpunan persamaan di atas sebagai persamaan vektor

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$$

Dimana

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Berkaitan dengan sistem persamaan diatas, berikut ini adalah matriksnya

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Dan matriks yang diperbesar

$$[A \ b] = [a_1, a_2, \dots, a_n, b]$$

Kita juga dapat merepresentasikan sistem persamaan di atas sebagai

$$Ax = b$$

Dimana

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Teorema : Sistem persamaan $Ax = b$ memiliki solusi jika dan hanya jika

$$\text{rank } A = \text{rank}[A \ b]$$

Pembuktian : Misalkan sistem $Ax = b$ memiliki solusi. Karena itu, b adalah kolom kombinasi linear dari A , yakni, terdapat $x_1, \dots, x_n$ sedemikian sehingga

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Oleh karena itu b termasuk $\text{span}[a_1, \dots, a_n]$ dan karenanya

$$\begin{aligned} \text{rank } A &= \dim \text{span } [a_1, \dots, a_n] \\ &= \dim \text{span } [a_1, \dots, a_n, b] \\ &= \text{rank } [A \ b] \end{aligned}$$

Misalkan $\text{rank } A = \text{rank}[A \ b] = r$. Jadi, kita memiliki r kolom bebas linear dari A . Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_r$ menjadi kolom ini. Oleh karena itu, $a_1, a_2, \dots, a_r$ juga merupakan kolom-kolom bebas linear dari matriks $[A \ b]$. Karena $\text{rank}[A \ b] = r$, kolom yang tersisa dari $[A \ b]$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $a_1, a_2, \dots, a_r$. Secara khusus, b dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kolom-kolom tersebut. Oleh karena itu, terdapat $x_1, \dots, x_n$ sedemikian sehingga $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$

Simbol $\mathbb{R}^{m \times n}$ menunjukkan bahwa himpunan matriks $m \times n$ yang elemen-elemennya bilangan real

Teorema 2.1 Diberikan persamaan $Ax = b$, dimana $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan $\text{rank } A = m$. Sebuah solusi untuk $Ax = b$ dapat diperoleh dengan menentukan nilai yang berubah-ubah untuk $n - m$ variabel

Bukti

Kita memiliki $\text{rank } A = m$, dan kemudian kita dapat menemukan m kolom-kolom bebas linear dari A . Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_m$ menjadi kolom.

Tulis ulang persamaan $Ax = b$ seperti

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b - x_{m+1} a_{m+1} - \dots - x_n a_n$$

Tentukan $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ nilai yang berubah-ubah, katakan

$$x_{m+1} = d_{m+1}, x_{m+2} = d_{m+2}, \dots, x_n = d_n$$

Dan misalkan

$$B = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Perhatikan bahwa $\det B \neq 0$. Kita dapat merepresentasikan sistem persamaan diatas sebagai

$$B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [b - d_{m+1} a_{m+1} - \dots - d_n a_n]$$

Matriks B adalah tidak singular, dan kemudian kita dapat menyelesaikan untuk $[x_1, x_2, \dots, x_m]^T$. Secara khusus,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = B^{-1}[b - d_{m+1}a_{m+1} - \dots - d_na_n]$$

2.4 Perkalian Titik dan Aturannya

Nilai mutlak dari bilangan real a , dinotasikan $|a|$, didefinisikan sebagai berikut :

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

Formula berikut berlaku :

- 1) $|a| = |-a|$;
- 2) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- 3) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 4) $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$;
- 5) $|ab| = |a||b|$;
- 6) $|a| \leq c$ dan $|b| \leq d$ berarti $|a + b| \leq c + d$;
- 7) Pertidaksamaan $|a| < b$ adalah ekuivalen dengan $-b < a < b$

Untuk $x, y \in \mathbb{R}^n$, kita definisikan Perkalian Titik Euclid

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$$

Perkalian titik adalah fungsi bernilai real $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang memiliki sifat-sifat berikut ini :

- 1) Positivity : $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
- 2) Simetri : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 3) Additivity : $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- 4) Homogeneity : $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle, \forall r \in \mathbb{R}$

Sifat dari additivity dan homogeneity pada vektor kedua juga berlaku, yaitu

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, ry \rangle = r\langle x, y \rangle, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Sifat diatas dapat ditunjukkan menggunakan sifat 2 sampai 4, yakni

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \langle y + z, x \rangle \\ &= \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

Dan

$$\langle x, ry \rangle = r\langle x, y \rangle = r\langle y, x \rangle = r\langle x, y \rangle$$

Ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi bernilai real lainnya pada $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ yang memenuhi sifat 1 sampai 4 diatas. Banyak hasil yang melibatkan perkalian titik Euclidean juga berlaku untuk perkalian titik lainnya

Vektor x dan y dikatakan orthogonal jika $\langle x, y \rangle = 0$

Norma Euclidean dari vektor x didefinisikan sebagai berikut :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x}$$

Teorema 2.3 Cauchy-Schwarz Inequality

Untuk setiap dua vektor x dan y di $\mathbb{R}^n$, pertidaksamaan Cauchy-Schwarz adalah berlaku sebagai berikut :

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||$$

Selanjutnya, persamaan berlaku jika dan hanya jika $x = \alpha y$ untuk beberapa $\alpha \in \mathbb{R}$

Bukti

Pertama kita asumsikan bahwa x dan y adalah vektor satuan, yakni $||x|| = ||y|| = 1$. Maka,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&= 2 - 2\langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

Atau

$$\langle x, y \rangle \leq 1$$

Dengan persamaan berlaku jika dan hanya jika $x = y$

Selanjutnya, dengan asumsi bahwa baik x maupun y adalah nol (karena pertidaksamaan berlaku jika salah satunya adalah nol), kita mengubah x dan y dengan vektor satuan $x/\|x\|$ dan $y/\|y\|$. Kemudian, terapkan sifat 4 untuk mendapatkan

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

Sekarang kita ubah x dengan $-x$ dan kemudian, terapkan lagi sifat 4 untuk mendapatkan

$$-\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

Dua pertidaksamaan terakhir menunjukkan pertidaksamaan nilai mutlak. Persamaan berlaku jika dan hanya jika $x/\|x\| = \pm y/\|y\|$, dengan $x = \alpha y$ untuk beberapa $\alpha \in \mathbb{R}$.

Norma Euclidean dari sebuah vektor $\|x\|$ memiliki sifat-sifat berikut :

- 1) Positivity : $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
- 2) Homogeneity : $\|rx\| = |r|\|x\|$, $r \in \mathbb{R}$;
- 3) Triangle Inequality : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ketaksamaan segitiga dapat dibuktikan dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz sebagai berikut

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz,