

f_x

VARIABEL KOMPLEKS

Jitu Halomoan Lumban Toruan

VARIABEL KOMPLEKS

VARIABEL KOMPLEKS

Jitu Halomoan Lumban Toruan



PT. INDONESIA EMAS GROUP

VARIABEL KOMPLEKS

© Penerbit Indonesia Emas Group

Penulis:

Jitu Halomoan Lumban Toruan

Editor:

Natalius Simamora

Cetakan Pertama: Februari 2022

Cover: Rusli

Tata Letak:

Tim Kreatif Penerbit Indonesia Emas Group

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

**PENERBIT INDONESIA EMAS GROUP
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT**

Jalan Pasir Putih No. 16 Kelurahan Mekarjaya, Kecamatan Rancasari
Kota Bandung – 085223186009

E-mail: indonesiaemasgroup5758@gmail.com

Copyright © 2022 by Penerbit Indonesia Emas Group
All Right Reserved

- Cet. I – : Penerbit Indonesia Emas Group, 2022
Dimensi : 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-99571-1-7

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Judul : Variabel Kompleks
Pengarang : Jitu Halomoan Lumban Toruan, S.Pd., M.Pd
Penerbit : PT. Indonesia Emas Group
Tahun Terbit : 2022
Jumlah Halaman : 176

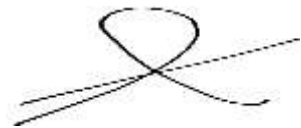
Variabel kompleks adalah induk dari materi kalkulus, aljabar, analisis real, persamaan diferensial dan struktur aljabar. Variabel kompleks bisa dipahami dengan baik apabila kita sudah menguasai materi materi dasar yang ada dalam matematika. Dalam memahami variabel kompleks dibutuhkan nalar dan logika yang tinggi untuk dapat mengerti fakta, konsep, prinsip dan skill menyelesaikan setiap persoalan yang ada. Bilangan Kompleks (BAB 1) sudah di pelajari dalam kalkulus dan matematika dasar. Untuk dapat memahami bilangan kompleks, para pembaca sudah harus memiliki kemampuan dasar seperti mengetahui definisi dan turunan atau cabang bilang kompleks. Dalam bilangan kompleks kita juga di hadapkan untuk memahami secara dalam dan bersifat abstrak fungsi analitik (BAB 2). Dalam memahami fungsi analitik pembaca harus diwajibkan memahami geometri datar, geometri ruang dan geometri analitik. Dalam buku variabel kompleks ini juga ada tranformasi elementer (BAB 3), dimana setiap pembaca sudah memiliki bekal seperti menguasai kalkulus dasar dan kalkulus lanjut. Bagian terakhir dari buku jilib satu ini ada materi daret Laurent dan residu (BAB 4). Tujuan utama penulisan buku ini adalah untuk memenuhi kebutuhan calon sarjana MIPA maupun Pendidikan matematika. Selain untuk mahasiswa, buku ini juga penting bagi yang berminat dalam ilmu matematika

Kesimpulan: Dengan membaca buku variabel kompleks ini, para pembaca dituntun untuk berpikir luas terhadap ilmu matematika. Dalam buku ini juga di perlihatkan konsep dasar sampai pada tahap konsep yang paling abstrak, sehingga dapat melatih logika dan nalar pembaca.

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa saya panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga saya dapat menyelesaikan buku variabel kompleks, yang memiliki tujuan memenuhi kebutuhan para pembaca terkhusus para mahasiswa yang duduk di fakultas MIPA dan Fakultas Keguruan. Buku ini berjudul: “Variabel Kompleks”. Saya juga tidak lupa mengucapkan terimakasih kepada para pemberi saran terhadap buku ini, masukan dan kritikan terhadap buku ini adalah bagian dari penyerpurnaan. Dalam buku ini berisi tentang fakta dalam kehidupan sehari-hari yang dikemas dengan konsep. Buku Variabel Kompleks ini terdiri dari 4 BAB pada Jilib 1. Variabel kompleks menjelaskan mulai dari fakta, konsep, prinsip dan skill dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari. Buku ini menggabungkan beberapa materi yang ada dalam mata kuliah yang ada di fakultas MIPA. Saya menyadari, tidak ada gading yang tidak retak. Sebagai penulis, saya menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kata sempurna. Saya dengan rendah hati dan dengan tangan terbuka menerima berbagai masukan, kritikan ataupun saran yang bersifat membangun. Akhir kata saya ucapkan terimakasih.

Jakarta 10 Februari 2022



Jitu Halomoan Lumban Toruan

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Daftar Gambar	iv
Latar Belakang.....	1
 BAB 1. BILANGAN KOMPLEKS.....	2
1.1. Bilangan Kompleks dan Aljabar Kompleks	2
1.2. Geometri Bilangan Kompleks	13
Soal Diskusi	22
Soal Latihan.....	30
 BAB 2. FUNGSI ANALITIK	38
2.1. Lingkungan- r terhapus bagi z_0	38
2.2. Geometri Elementer pada Fungsi Kompleks.....	41
2.3. Limit Kontinuitas	47
2.4. Persamaan Cauchy-Reimann	58
2.5. Fungsi Analitik	61
Soal Latihan.....	61
 BAB 3. TRANSFORMASI ELEMENTER	69
3.1. Pemetaan	69
3.2. Fungsi Kompleks Elementer	70
3.3. Transformasi Linear.....	79
3.4. Transformasi Pangkat	83
3.5. Transformasi Kebalikan	85
3.6. Transformasi Bilinear	87
3.7. Transformasi Eksponensial dan Logaritmik	88
Rangkuman	101
Soal Latihan.....	107

BAB 4. DERET LAURENT DAN RESIDU	120
4.1. Deret Laurent	120
4.2. Singularitas dan Kenolan Fungsi Analitik.....	130
4.3. . Residu dan Penerapannya.....	146
4.4. Distribusi Empiris	120
Rangkuman	155
Soal Latihan 1	161
Soal Latihan 2	167
GLOSARIUM	173
DAFTAR ISI	174
RIWAYAT HIDUP	176

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.3. Diagram Argan	10
Gambar 2.1. (a) Lingkungan $N(i,1)$; (b) Lingkungan $N^*(0, \varepsilon)$..	39
Gambar 3.1. Pemetaan $W = 2iZ + i$	70
Gambar 3.2. Pergeseran	81
Gambar 3.3. Contoh Fungsi $w = 2iz + 1 + i$	82
Gambar 3.4. Transformasi Pangkat	85
Gambar 3.5 transformasi $w = \frac{1}{z}$	86
Gambar 3.6. Bayangan $y = b$ dibawah $w = e^z$	89
Gambar 3.7. Garis ke sinar dibawah $w = e^z$)	90
Gambar 3.8 $w = z^{1/3}$	95
Gambar 3.9 cabang-cabang $w = z^{1/3}$	97
Gambar 3.10 Pemetaan $w = \log z$	98
Gambar 3.11. $\phi = \alpha + \arg f'(z_0)$	102
Gambar 3.12. Pemetaan Serupa	105
Gambar 4.1. Anulus Konvergensi	121
Gambar 4.2. Konvergensi Deret Taylor dan Laurent	122
Gambar 4.3. Tiga Deret Berbeda $f(z) = 3/[z(z - i)]$	125
Gambar 4. 4. Residu Pada z_0	141

A. Latar Belakang

Variabel kompleks merupakan perluasan dari materi kalkulus, aljabar, analisis real, persamaan diferensial dan struktur aljabar. Materi variabel kompleks dapat dikategorikan ke dalam pemahaman tingkat tinggi atau kategori yang cukup sulit karena pada materi variabel kompleks akan banyak mempelajari tentang transformasi, deret, integral dan lainnya. Oleh karena itu, dibutuhkan pemahaman dan penguasaan akan materi materi yang ada dalam materi materi yang sudah disebutkan di atas. Dalam buku ini akan membahas mamulai dari bilangan kompleks, transformasi elementer sampai pada tahap deret lauret dan residu. Tujuan utama penulisan buku ini adalah untuk memenuhi kebutuhan para calon guru dan para calon sarjana yang duduk di bangku kuliah fakultas MIPA. Selain untuk mahasiswa, tujuan lainnya adalah untuk menambah wawasan ataupun ilmu pengetahuan serta dapat menjadi pedoman bagi para pembaca yang ingin mempelajari atau yang ingin mendalami materi tentang variabel kompleks. Kiranya buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca terlebih dapat dipahami dengan mudah.

BAB 1

BILANGAN KOMPLEKS

1.1. Bilangan Kompleks dan Aljabar Kompleks

Definisi Bilangan Kompleks. Bilangan Kompleks dan Aljabarannya memiliki arti yang berbeda namun saling berkesinambungan atau berhubungan karena berkaitan dengan variabel kompleks. (Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019b) Bilangan kompleks didefinisikan sebagai “pasangan terurut” (*ordered pair*) bilangan nyata dari dua bilangan real.(Yuninda 2007) . Sedangkan dalam Persamaan diferensial adalah persamaan ilmu matematika untuk fungsi suatu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. (Program et al. n.d.). Suatu bilangan dinyatakan bilangan kompleks jika $z = (x, y) = x + yi$, secara geometri dinyatakan sebagai berikut adalah x, y pada bilangan kompleks (*Cartesian*) yaitu bilangan terurut.(Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019c) Dengan demikian semua bilangan kompleks dapat terwakili oleh semua titik pada bilangan *Cartesian* atau bilangan terurut.(Monks et al. 2006) Himpunan semua pasangan itu dengan operasi-operasi tertentu yang sesuai dapat didefinisikan sebagai sistem bilangan kompleks.(Yuninda 2007). Catatan: tidak ada alasan khusus dalam penggunaan x, y , dan f untuk mempersentasikan domain, daerah hasil, dan fungsi. Banyak huruf-hiruf lain yang dapat di gunakan. Pada umumnya digunakan x, y , dan f untuk menyatakan domain bebas (atau variabel terkait/dependen

Contoh:

1. Misal : Tentukan solusi dari $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = 4$$

$$x_{12} = \sqrt{4} = \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

2. Misal : Tentukan solusi dari $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4$$

$$x_{12} = \sqrt{-4} = \begin{cases} x_1 = +2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \sqrt{4} \\ &= \pm 2\sqrt{-1} \\ &= \pm 2i \end{aligned}$$

Ternyata $i = \sqrt{-1}$ didefinisikan sebagai “bilangan imajiner” (Yuninda 2007)

Notasi Bilangan Kompleks

$z = x + i.y$ (notasi Bilangan Kompleks)

Dengan notasi tersebut dapat diketahui bahwa:

$$= x + i.y$$

Keterangan:

$= i.y$: Komponen Imajiner

$= x$: Komponen Real.

Maka bi

$$z = x$$

$$z = i.g$$

= bilangan kompleks

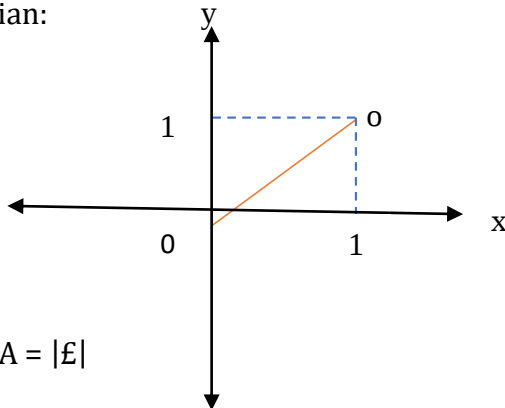
Makna dari $z = x + iy$

Diagram Argand

Diagram Argand di sebut juga bilangan Kompleks.

Tentukan $z = 1 + i$

Penyelesaian:



$$z = 1 + i$$

Panjang OA = $|z|$

$$|z| = \sqrt{(1^2) + (1^2)} = \sqrt{2}$$

Jika : $z = x + iy$, maka

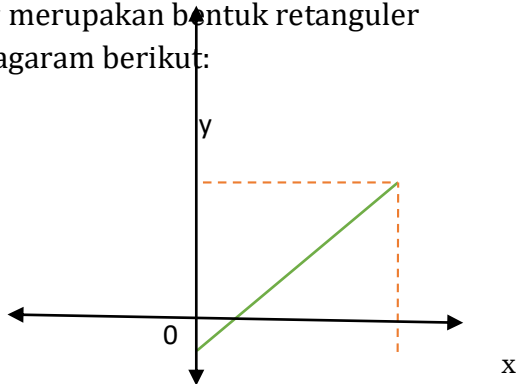
$$|\sqrt{(1^2) + (1^2)}| = \sqrt{(x^2) + (y^2)} \text{ Nilai mutlak.}$$

Bentuk-bentuk lain dari $z = x + iy$

Tentukan:

$z = x + iy$ merupakan bentuk retanguler

Gambar diagram berikut:



Kita bisa proyeksikan:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\text{Sehingga } E = (r \cos \theta + i r \sin \theta)$$

Menjadi $E = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ karena $r = |E| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Kemudian kita bisa mendapatkan tetanya menjadi $\tan \theta = \frac{y}{x}$ atau bisa menggunakan: Menggunakan rumus culek

$$e^i = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Jadi $E = r e^{i\theta}$ Ini merupakan bentuk polar.

Aljabar Kompleks

Bilangan kompleks adalah *pasangan terurut* dari dua bilangan real x dan y , yang dinyatakan oleh (x, y) . Definisi di atas merupakan definisi formal atau yang sering digunakan untuk menyatakan bilangan kompleks. Untuk itu selanjutnya, ada beberapa hal yang perlu diperhatikanlah sebagai lambang dan ketentuan dari bilangan kompleks (x, y) . Bilangan kompleks dilambangkan dengan berbagai huruf $z = (x, y)$. Bilangan real x disebut *bagian real* dari z , ditulis $\text{Re}(z)$. Bilangan real y disebut *bagian imajiner* dari z , ditulis $\text{Im}(z)$. Beberapa pasangan terurut didefinisikan secara khusus, yaitu: (Anon n.d.)

$(x, 0) = x$, merupakan bilangan asli (*real*)

$(0,1) = i$, dinamakan satuan bilangan yang mempunyai sifat (*imaginer*).

a. Menentukan (i^n) n = Bilangan Bulat

$$i^0 = 1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^5 = (i^2)^2 \cdot i \text{ atau}$$

$$i^5 = (i^2)^5$$

$$= (-1)^5$$

$$= -1$$

Perlu di ingat bahwa 1^2 Tidak seperti ini

$$i^0 = 1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} i^1 = i \rightarrow i \times i &= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{(-1) \times (-1)} \end{aligned}$$

$$i^2 = -1 \rightarrow i^2 = \sqrt{1} = 1$$

Seharusnya:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \left[(-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (-1)^1 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1(i) = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 \cdot i^0 = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$$

Operasi Penjumlahan Bilangan Kompleks

Definisi dari kesamaan dua bilangan kompleks sebagai berikut.

Dimana dua bilangan kompleks $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ dikatakan **sama**, ditulis $z_1 = z_2$, jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

y_2 . Khususnya $z = (x, y) = (0, 0)$, jika dan hanya jika $x = 0$ dan $y = 0$.

Definisi operasi pada penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks sebagai berikut:

Jika $z_1 = (x_1, y_1)$, dan $z_2 = (x_2, y_2)$ adalah bilangan kompleks. Maka *jumlah* dan *hasil kali* z_1 dan z_2 , masing-masing adalah bilangan kompleks $z_1 + z_2$ dan $z_1 z_2$ yang diberikan oleh aturan berikut,

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Himpunan bilangan kompleks X yang merupakan operasi penjumlahan dan perkalian yang membentuk suatu lapangan (*field*). (Yuninda 2007)

Teorema 1

Himpunan bilangan kompleks X memenuhi sifat-sifat lapangan, yaitu:

1. $z_1 + z_2 \in C$, dan $z_1 z_2 \in C$, $\forall z_1, z_2 \in C$
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall z_1, z_2 \in C$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, dan $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$
4. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$
5. Ada $0 = (0, 0) \in C$, $z + 0 = 0 + z$; $\forall z \in C$
6. Ada $1 = (1, 0) \neq 0$, $1 \in C$, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$; $\forall z \in C$
7. Untuk setiap $z = (x, y) \in C$ ada $-z = (-x, -y) \in C$ sehingga $z + (-z) = (-z) + z = 0$

8. Untuk setiap $z = (x, y) \in C$, $z \neq 0$ ada $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in C$ sehingga $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$

Dari Teorema 1 merupakan bukti yang bisa diterapkan dalam berbagai definisi yang telah disampaikan sebelumnya. Pada bagian ini yang merupakan suatu penulisan lain dari bilangan kompleks $z = x + yi$. (Male and Lumbantoruan 2021) Dengan identifikasi yaitu $x = (x, 0)$, dan $i = (0, 1)$.

$(0, y)(0, 1) = iy$, disebut bilangan imajiner sejati, $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$.

$$= x + iy$$

$$= x + iy$$

Sehingga $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1$, maka $z = (x, y)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$z = x + yi$$

dengan,

x dan y bilangan real, $i^2 = -1$

x disebut bagian real dari z , ditulis $x = \text{Re}(z)$

y disebut bagian dari bilangan kompleks (*imaginer*) dari z , ditulis $y = \text{Im}(z)$. Dengan cara menggunakan $z = x + yi$, akan lebih memudahkan ketika hendak melakukan operasi pada bilangan kompleks, karena operasinya dapat dilakukan seperti operasi pada bilangan real dengan melihat $i^2 = -1$. Maka berikut ini adalah definisi dan contoh sebagai berikut: (Pendidikan and Sains 2020b)

Definisi Dalam definisi penjumlahan tersebut terlihat dengan jelas operasi pada bilangan real dan perkalian.

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2,$$

Dengan mengganti i^2 oleh -1 didapat:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Contoh 1:(Lumbantoruan, Pd, and Pd n.d.)

Jika $z = (x, y)$ dan $1 = (1, 0)$, maka

$$z \cdot 1 = (x, y)(1, 0) = (x + yi)(1 + 0i) = x + yi = z$$

Jika $z = (x, y)$ dan $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$, maka

$$\begin{aligned} z z^{-1} &= (x + yi) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} i \right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \left(\frac{yx - xy}{x^2 + y^2} \right) i = 1 + 0 \cdot i = 1 \end{aligned}$$

Contoh 2:(Pembelajaran n.d.)

$$E_1 = 2i - 3$$

$$E_2 = 2 - 1$$

Tentukan:

1. $|E_1 + E_2|$
2. Nyatakan $E_1 + E_2$ dalam bentuk POLAR

Penyelesaian:

Diketahui:

$$E_1 = 2i - 3$$

$$E_2 = 2 - i$$

$$1. E_1 + E_2 = (2i - 3) + (2 - i)$$

$$= 2i - 3 + 2 - i$$

$$= i - 1 \text{ untuk menentukan harga mutlak } \rightarrow |E| =$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

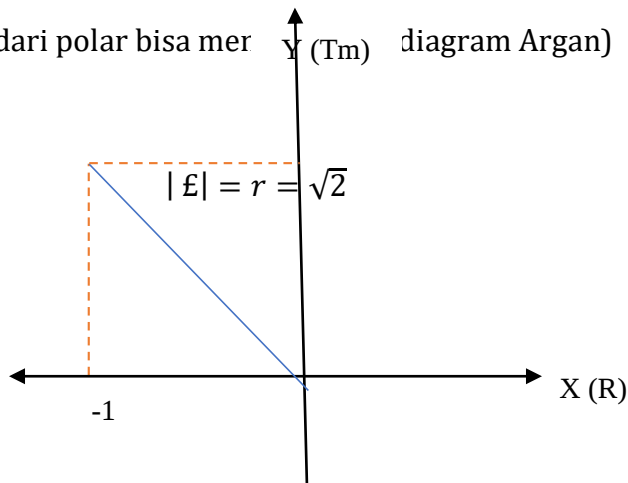
$$\therefore |E_1 + E_2| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$2. E_1 + E_2 = E$$

$$\therefore E = i - 1$$

(Bentuk dari polar bisa mer Y (Tm) diagram Argan)



Gambar 1.3. Diagram Argan

Kita mau menentukan θ maka menggunakan:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = (-1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \quad \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Sehingga kita bisa membuat POLAR menjadi:

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

Jika: $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ adalah bilangan kompleks, maka:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Konjugate Kompleks

Konjugate adalah perubahan tanda ($-$ atau $+$) pada komponen imajiner dari bilangan kompleks yang di konjugasikan.

Contoh 1

Misalkan kita memiliki:

$$E_1 = 1 - 2i \rightarrow \overline{E_1} = 1 + 2i$$

$$E_2 = 4i \rightarrow \overline{E_2} = -4i$$

$$E_3 = 5 \rightarrow \overline{E_3} = 5$$

Contoh 2

$$E = x + iy$$

$$\bar{E} = x - iy$$

Kita mau menentukan perkalian maka:

$$\begin{aligned}\bar{E}E &= (x + iy)(x - iy) \\ &= (x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2\end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\bar{E}E = y^2 + y^2$$

$$|E| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|E|^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \bar{E}E = |E|^2 = x^2 + y^2$$

Oprasi Perkalian

Oprasi Perkalian juga berkaitan dan oprasi pembagian.

Contoh 1

Misalkan kita memiliki

$$E_1 = 1 - i$$

$$E_2 = 2 - i$$

Tentukan nilai mutlak dari:

1. $\frac{E_1}{E_2}$
2. $E_1 \cdot E_2$

Jawaban

$$1. \frac{E_1}{E_2} = \frac{1-i}{2+i}$$

Penyelesaian:

$$\bar{E}_2 = 2 - i$$

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{E_2} &= \frac{1-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} \\ &= \frac{2-i-2i-1}{4+1} \\ &= \frac{1-3i}{5}\end{aligned}$$

Tentukan nilai mutlak atau harga mutlaknya

$$\left| \frac{E_1}{E_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\left| \frac{E_1}{E_2} \right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}}$$

$$E_1 \cdot E_2 = (1 - i)(2 + i)$$

Penyelesaian:

$$= 2 + i - 2i - 1$$

$$= 3i$$

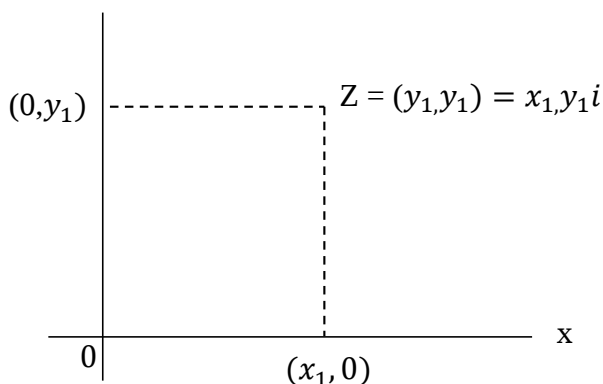
$$\begin{aligned} \therefore |E_1 \cdot E_2| &= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 1} \end{aligned}$$

$$|E_1 \cdot E_2| = 10$$

2.1 Geometri Bilangan Kompleks

Geometri merupakan bilangan kompleks yang pasangannya berurutan dua bilangan *real*. Karena dalam bilangan kompleks, $z = (x, y) = x + yi$, dalam geometri disebut sebagai titik (x, y) dalam *Cartesian*, sehingga semua titik pada bidang *Cartesian* dapat terwakili. Perlu diketahui terdapat sedikit konsep yang menggambarkan matematika dan tidak semua konsep-konsep tersebut tidak saling berkaitan. Turunan, elemen fundamental dari kalkulus diferensial, adalah sebagaian dari konsep turunan yang di mana terdapat dua masalah yang mengarah pada turunan yaitu menampilkan garis singgung pada kurva disuatu titik. (Modul Kalkulus Dasar 2016)

Penyebutan dalam sumbu x merupakan sumbu real karena memiliki sistem satuannya hanya 1 dan sumbu y disebut sumbu imajiner dengan satuan yang dilambangkan dengan i . Sedangkan 0 merupakan titik asal yang di mana merupakan bilangan kompleks $z = 0$ dan titik koordinatnya merupakan (x_1, y_1) dimana menyatakan bahwa hal tersebut merupakan bilangan kompleks $= (x_1, y_1) = x_1 + y_1 i$. Pada bidang dari *Cartesian* yang dinamakan merupakan *bidang kompleks* atau bidang z . Pada bilangan kompleks dalam bidang geometri bilangan kompleks yaitu **diagram Argand** yang merupakan sistim *Cartesius* yang di gunakan untuk menentukan posisi pada bilangan kompleks. Dan kita juga bisa menggunakan integral tentu untuk menentukan luas dari daerah-daerah yang berbentuk rumit. Dengan menggunakan $A(R) = \int_a^b f(x)dx$ untuk mencari luas dari daerah-daerah yang berbentuk rumit. (Lumbantoruan 2019)

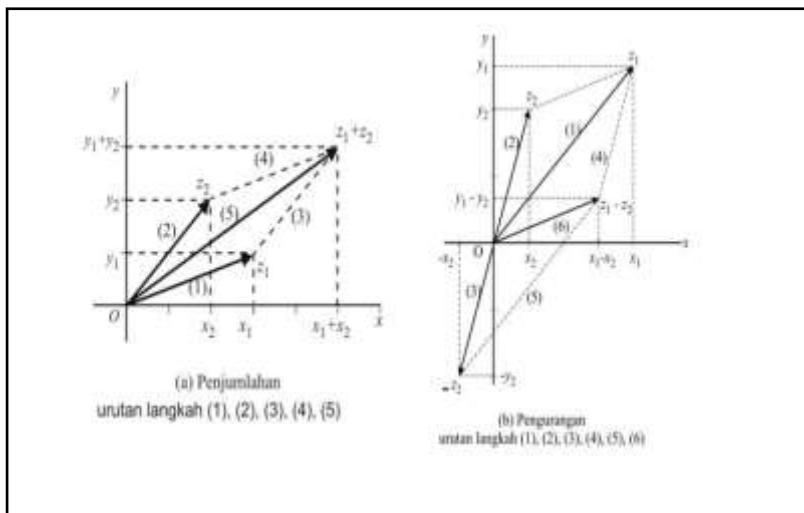


x : sumbu real

y : sumbu imajiner

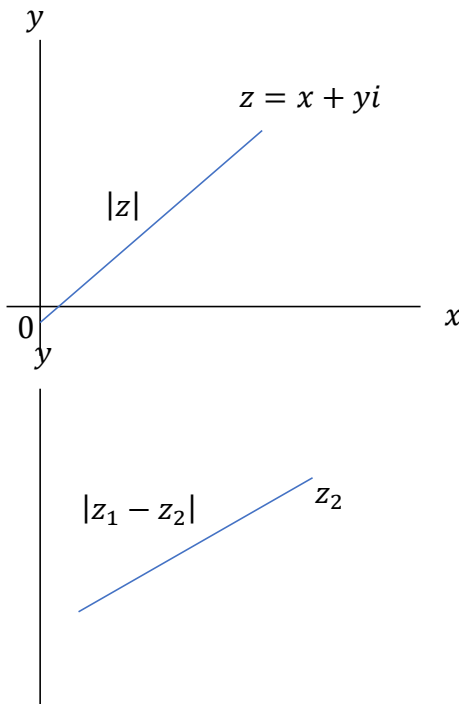
O : $(0,0)$

Karena setiap vektor di bilangan Cartesian di sebut sebagai vektor yang bermula dari titik: $O = (0,0)$ dan berujung pada suatu titik (x,y) . Sehingga membentuk (x,y) yang merupakan vektor. Dalam pengertian sempit bilangan kompleks $z = (x,y) = x + yi$ dapat dilihat sebagai vektor (x,y) pada operasi *penjumlahan*, dan *pengurangan* dua bilangan kompleks dalam bentuk geometri yang dimana sama dengan vektor.(Pembelajaran n.d.)



Modulus (Nilai Mutlak) dari Bilangan Kompleks

Diketahui $z = x + yi$ adalah bilangan kompleks, sehingga modulus z , menjadi $|z|$ dan dapat dinyatakan menjadi $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pengertian ini menjelaskan bahwa $|z|$ adalah bilangan real yang positif atau bernilai nol. Arti geometri sendiri bisa dikatakan $|z|$, merupakan panjang vektor (x, y) yang di mana berasal dari titik asal yaitu $O = (0,0)$ pada titik $z = (x, y)$. Sehingga dari definisi tersebut, $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, menjadi jarak antara titik z_1 dan titik z_2 pada bidang z .

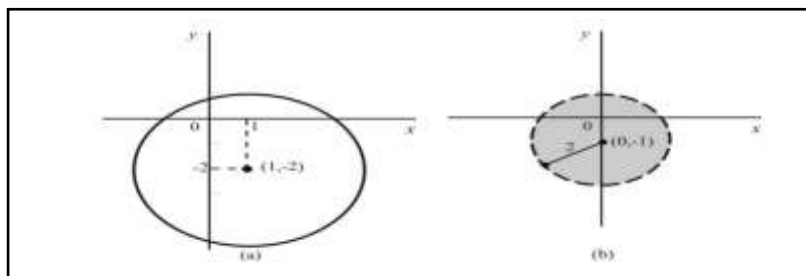


Maka apabila $z_1 = x_1 + y_1i$ dan t merupakan bilangan real yang positif $|z - z_1| = t$ merupakan lingkaran, yang bertitik di dalam suatu pusat $z_1 = (x_1, y_1)$ yang berjari-jari r , sedangkan $|z - z_1| < r$ merupakan daerah yang berada di dalam lingkaran dan bertumpu ada suatu titik pusat di z_1 dan (x_1, y_1) yang berjari-jari r . Perlu diketahui *tidak ada urutan antara dua bilangan kompleks* dari z_1 dan z_2 . Tapi perlu di ingat modulus menggunakan urutan sebab modulus adalah suatu bilangan kompleks yang real.

Contoh:

Gambarkan $|z - 1 + 2n| = 3$ dan $|z + n| < 2$ pada bidang z .

$|z - 1 + 2n| = 3$ dapat ditulis $z - (1 - 2n) = 3$ merupakan lingkaran berpusat di $z_1 = 1 - 2n = (1, -2)$ berjari-jari 3 perhatikan gambar di bawah. $|z + n| < 2$ atau $|z - (-n)| < 2$ menyatakan daerah lingkaran yang berpusat di $z_1 = -n = (0, -1)$ berjari-jari 2 perhatikan gambar dibawah.



Persamaan dan pertidaksamaan di atas dijabarkan sebagai berikut: Jika $z = x + yj$. Dari: $|z - 1 + 2j| = 3$ didapat $|x + yj - 1 + 2j| = 3$ $|(x - 1) + (y + 2)j| = 3$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 3$ atau $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(1, -2)$ berjari-jari 3. Dengan cara yang sama $|z + j| < 2$, berarti $|x + yj + j| < 2$ atau $|x + (y + 1)j| < 2$

$$\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} < 2 \text{ atau } x^2 + (y + 1)^2 < 4,$$

Pada gambar di atas menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat di titik $(0, -1)$ berjari-jari 2. Sifat-sifat dari modulus atau nilai mutlak dari bilangan kompleks.(Pembelajaran n.d.)

A. Jika s bilangan kompleks, maka:

1. $|s|^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$
2. $|s| = |\bar{z}|$
3. $|s|^2 = z\bar{z}$
4. $|s| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
5. $|s| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

B. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka

1. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|, z_2 \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

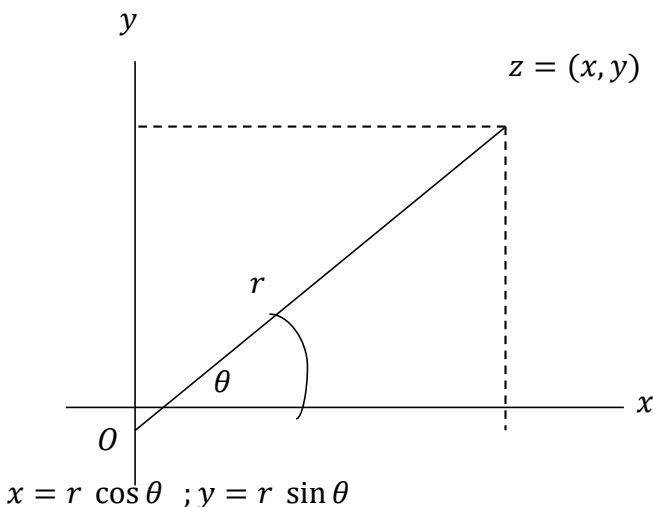
Bukti:

Misalkan $z = x + yi$, maka:

1. $|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$
2. $\bar{z} = x - yi$, sehingga $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
3. $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z\bar{z}$
4. $|z|\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |Re(z)| \geq Re(z)$
5. $|z|\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |Im(z)| \geq Im(z)$

Bentuk Polar (*Kutub*) dan Eksponen

Kita tahu bahwa koordinat polar merupakan $z = (x, y)$ yang merupakan bilangan kompleks dan dinyatakan dalam bentuk r dan θ yaitu $z = (r, \theta)$. Maka coba perhatikan gambar dibawah ini:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

θ = sudut antara sumbu

x positif dengan Oz . Pada $z \neq 0$, membentuk sudut θ dihitung dari $\tan \theta = \frac{x}{y}$ jika $z = 0$ sehingga $r = 0$ dan θ dapat dipilih sembarang. Maka bilangan kompleks dari $z = (x, y) = x + yi$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Definisi

Bilangan kompleks $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, sudut θ disebut z , dan ditulis $\theta = \arg z$. Kemudian θ dan $0 \leq \theta < 2\pi$ atau bisa dengan $-\pi < \theta \leq \pi$ dikatakan argument utama dari z , sehingga $\theta = \text{Arg } z$.

Penjelasan untuk θ bisa dipilih salah satu saja.

Definisi

Dua bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ dikatakan sama, yaitu $z_1 = z_2$, jika $r_1 = r_2$, dan $\theta_1 = \theta_2$

Dengan memakai rumus Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$