

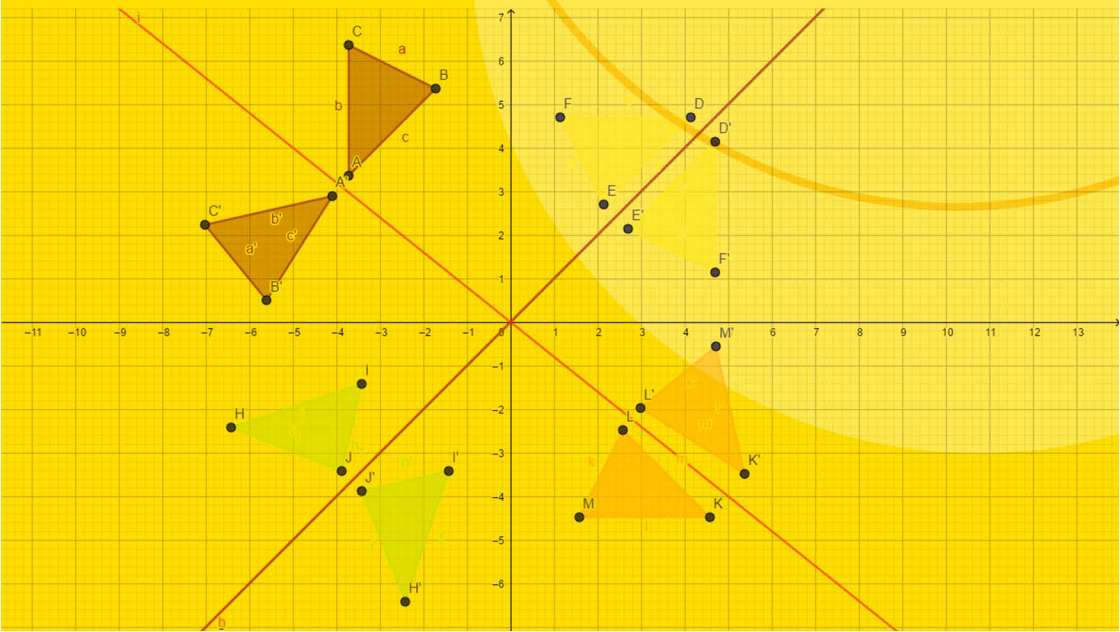


GEOMETRI TRANSFORMASI

I Putu Wisna Ariawan

I Made Ardana

I Gusti Ngurah Pujawan



Geometri Transformasi

Geometri Transformasi

**I Putu Wisna Ariawan
I Made Ardana
I Gusti Ngurah Pujawan**



Geometri Transformasi

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

I Putu Wisna Ariawan

I Made Ardana

I Gusti Ngurah Pujawan

Editor: Tim Penyusun

Cetakan Pertama: Januari 2023

Cover: Tim Penyusun

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2023, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2023 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023

Dimensi : 14,8 x 21 cm

ISBN: 978-623-448-417-5

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan kehadapan Tuhan Yang Maha Kuasa karena berkat karunia-Nya, buku Geometri Transformasi ini bisa diselesaikan, walaupun masih ada beberapa kekurangan.

Buku ini disajikan dalam 9 Bab yang terdiri atas Pengenalan Transformasi, Komposisi Transformasi, Pencerminkan dan Setengah Putaran, Isometri dan Grup, Geseran, Rotasi, Pencerminkan Geser, Lanjutan Isometri dan Grup, serta Transformasi Similaritas. Penyajian materi pada masing-masing bab telah diupayakan dengan penyajian yang jelas dan disertai ilustrasi yang memadai untuk memperjelas topik yang disajikan. Pada masing-masing akhir bab diberikan beberapa soal latihan agar pembaca dapat lebih memahami materi yang dibahas.

Penyusunan buku ini ditujukan untuk memperkaya buku referensi berbahasa Indonesia terkait dengan materi Geometri Transformasi. Buku ini akan sangat bermanfaat khususnya bagi mahasiswa yang sedang mengambil mata kuliah Geometri Transformasi atau bagi para pengajar mata kuliah Geometri Transformasi. Di samping itu, buku ini juga bisa digunakan sebagai referensi tambahan bagi para pembaca yang sedang menggeluti Geometri Transformasi.

Penulis menyadari, buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karenanya penulis sangat mengharapkan masukan yang konstruktif dari para pembaca. Semoga buku ini bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan.

Singaraja, Januari 2023

Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Daftar Simbol	v
Bab 1 Pengenalan Transformasi	1
A. Pengantar	1
B. Uraian Materi	1
1.1 Transformasi	1
1.2 Kolineasi	7
C. Latihan	13
Bab 2 Komposisi Transformasi	17
A. Pengantar	17
B. Uraian Materi	17
2.1 Hasil Kali (Komposisi) Transformasi	17
2.2 Transformasi Invers	21
C. Latihan	25
Bab 3 Pencermian dan Setengah Putaran	31
A. Pengantar	31
B. Uraian Materi	31
3.1 Pencermian	31
3.2 Rumus Pencermian	32
3.3 Setengah Putaran	35
3.4 Rumus Setengah Putaran	37
C. Latihan	44
Bab 4 Isometri dan Grup	51
A. Pengantar	51
B. Uraian Materi	51
4.1 Isometri	51
4.2 Isometri Searah dan Isometri Berlawanan	55

4.3	Grup	57
4.4	Sub Grup	60
C.	Latihan	62
Bab 5	Geseran	65
A.	Pengantar	65
B.	Uraian Materi	65
5.1	Ruas Garis Berarah	65
5.2	Geseran	68
5.3	Rumus Geseran secara Analitis	69
5.4	Komposisi Geseran	74
C.	Latihan	78
Bab 6	Rotasi	81
A.	Pengantar	81
B.	Uraian Materi	81
6.1	Rotasi	81
6.2	Rumus Rotasi secara Analitis	90
6.3	Komposisi Dua Buah Rotasi	93
C.	Latihan	100
Bab 7	Pencerminan Geser	103
A.	Pengantar	103
B.	Uraian Materi	103
7.1	Pencerminan Geser	103
7.2	Menentukan Sumbu Pencerminan Geser	111
C.	Latihan	112
Bab 8	Lanjutan Isometri dan Grup	117
A.	Pengantar	117
B.	Uraian Materi	117
8.1	Komposisi Beberapa Isometri	117
8.2	Teorema-Teorema Isometri	120
8.3	Persamaan Isometri	128
8.4	Grup Isometri	134
C.	Latihan	139
Bab 9	Transformasi Similaritas	141

A. Pengantar	141
B. Uraian Materi	141
9.1 Beberapa Istilah yang Terkait Transformasi Similaritas	141
9.2 Sifat-Sifat Transformasi Similaritas	142
C. Latihan	151
Daftar Pustaka	153
Glosarium	155
Indeks	156
Riwayat Hidup Penulis	159

Daftar Simbol

$g \circ f$	komposisi dari f dan g
$\in$	elemen atau anggota
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan real
$\overrightarrow{PA}$	garis yang melalui P dan A
$\Rightarrow$	implikasi
$\Leftarrow$	konvers
$\neq$	tidak sama
$\cong$	kongruen atau sama dan sebangun (untuk ruas garis ataupun poligon)
$\equiv$	kongruen atau sama dan sebangun (untuk vektor)
$m\angle ABC$	ukuran atau besar sudut ABC
$\sphericalangle CBA$	sudut berarah dengan $\overrightarrow{BC}$ sebagai kaki awalnya dan $\overrightarrow{BA}$ sebagai kaki akhirnya
$\parallel$	sejajar
$\nparallel$	tidak sejajar
$\forall$	semua atau untuk setiap
$\exists$	ada atau terdapat
$\langle G, * \rangle$	Grup G yang didalamnya didefinisikan operasi biner *
$\subseteq$	subset atau himpunan bagian
$\overrightarrow{AB}$	vektor atau ruas garis berarah dengan titik pangkal A dan titik ujung B
$\perp$	tegak lurus
$(A)^{-1}$	invers dari A

Bab 1

Pengenalan Transformasi

A. Pengantar

Setelah selesai mempelajari bab ini Anda diharapkan dapat: menentukan apakah suatu pemetaan merupakan suatu transformasi atau bukan, menentukan unsur tetap dalam suatu transformasi, menentukan hasil transformasi dari suatu unsur, melukis hasil transformasi dari suatu unsur, dan menentukan apakah suatu transformasi merupakan suatu kolineasi atau bukan.

B. Uraian Materi

Suatu transformasi dapat diartikan sebagai perubahan rupa, bentuk atau sifat. Dengan demikian, Geometri transformasi secara harfiah dapat diartikan sebagai geometri yang membahas perubahan rupa, bentuk atau sifat-sifat dari objek yang dibahas. Konsep transformasi sangat erat kaitannya dengan konsep fungsi yang bijektif. Pada pembahasan berikut akan dibahas konsep transformasi terutama dibatasi pada geometri bidang Euclides

1.1 Transformasi

Sebelum membahas pokok permasalahan transformasi terlebih dahulu akan dibahas kembali konsep fungsi karena konsep transformasi pada hakikatnya didasari oleh konsep fungsi.

Definisi 1.1

Suatu fungsi f dari himpunan A ke dalam (*into*) himpunan B yang dinyatakan dengan

$$f: A \rightarrow B$$

adalah pengawanan yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B . Bila $a \in A$ maka pasangannya dinyatakan dengan $f(a) = b \in B$.

B disebut peta dari A oleh f dan A disebut prapeta dari B .

Definisi 1.2

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut satu-satu (injektif) bila untuk sembarang elemen berlainan a_1 dan a_2 yang berada di dalam A maka $f(a_1) \neq f(a_2)$. Dalam notasi matematis dinyatakan dengan $f: A \rightarrow B$ dikatakan satu-satu jika memenuhi

$$\forall (a_1, a_2) \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Definisi di atas dapat dinyatakan dalam bentuk ekuivalen

$f: A \rightarrow B$ dikatakan satu-satu jika $\forall (f(a_1), f(a_2)) \in B$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$.

Definisi 1.3

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut kepada (surjektif) bila untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Dalam notasi matematis dinyatakan dengan $f: A \rightarrow B$ dikatakan surjektif bila $\forall b \in B$ maka $\exists a \in A$ sehingga $f(a) = b$.

Definisi 1.4

Fungsi yang bersifat injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif.

Definisi 1.5

Misalkan diberikan fungsi-fungsi $f: U \rightarrow W$ dan $g: W \rightarrow X$. Komposisi dari f dan g yang dinotasikan dengan $g \circ f$ adalah suatu fungsi dari U ke X yang didefinisikan dengan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ untuk setiap } x \in U.$$

Teorema 1.1

Komposisi dari fungsi bersifat asosiatif

Bukti:

Misalkan $f: U \rightarrow W$, $g: W \rightarrow X$ dan $h: X \rightarrow Z$ adalah fungsi-fungsi. Untuk setiap $x \in U$ diperoleh: $(h \circ (g \circ f))(x) = (h(g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$. Sementara itu, $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$. Artinya, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Teorema 1.2

Misalkan $f : U \rightarrow W$ dan $g : W \rightarrow X$ adalah fungsi-fungsi

- (a) Jika f dan g injektif maka $g \circ f$ injektif
- (b) Jika f dan g surjektif maka $g \circ f$ surjektif

Bukti:

- (a) Misalkan $x_1, x_2 \in U$. Jika $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ maka $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Karena g injektif maka $f(x_1) = f(x_2)$. Karena f juga injektif maka $x_1 = x_2$. Dengan demikian, jika $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ berakibat $x_1 = x_2$. Artinya $g \circ f$ injektif.
- (b) Misalkan $z \in X$. Karena g surjektif maka ada $w \in W$ sehingga $g(w) = z$. Karena f surjektif maka ada $x \in U$ sehingga $f(x) = w$. Dengan demikian, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(w) = z$.

Definisi 1.6

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan (tidak harus berlainan) maka perkalian kartesian (***cartesian product***) $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$. Bidangnyanya dinyatakan dengan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ atau sering dinyatakan dengan $\mathbb{R}^2$.

Bidang Euclides sering juga disebut bidang Kartesian dan dinyatakan dengan $\mathbb{R}^2$ karena setiap titik pada $\mathbb{R}^2$ dapat dinyatakan dalam pasangan terurut (a, b) . Dengan demikian, suatu fungsi f yang didefinisikan dari bidang Euclides ke dalam bidang Euclides dapat dinotasikan dalam bentuk $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definisi 1.7

Suatu transformasi T adalah suatu fungsi bijektif dari himpunan titik pada bidang Euclides $\mathbb{R}^2$ ke dalam himpunan titik pada bidang Euclides $\mathbb{R}^2$. Dalam notasi matematis dinyatakan dengan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definisi 1.8

Suatu transformasi $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ disebut transformasi identitas jika $I(P) = P$ untuk setiap titik $P \in \mathbb{R}^2$.

Definisi 1.9

Dua transformasi L dan T dikatakan sama atau identik jika kedua transformasi tersebut memiliki daerah asal yang sama dan jika untuk setiap X pada daerah asalnya berlaku $L(X) = T(X)$.

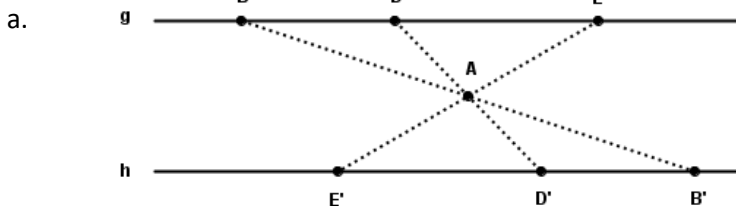
Contoh 1.1

Andaikan g dan h dua garis yang sejajar pada bidang Euclides V . A adalah sebuah titik yang terletak di pertengahan antara g dan h . Suatu padanan T dengan daerah asal g yang didefinisikan seperti berikut.

Apabila $P \in g$ maka $P' = T(P) = \overleftrightarrow{PA} \cap h$.

- Apakah daerah nilai dari T ?
- Apabila $D, E \in g$ dengan $D \neq E$, buktikan bahwa $D'E' = DE$ dengan $D' = T(D)$ dan $E' = T(E)$.
- Apakah T merupakan suatu transformasi?

Jawab :



Gambar 1.1

Daerah nilai dari T adalah h .

- Karena A di tengah-tengah g dan h dan juga $g \parallel h$ maka $AE = AE'$ dan $AD = AD'$. Perhatikan bahwa $m\angle DAE = m\angle D'AE'$ sehingga $\triangle DAE \cong \triangle D'AE'$ menurut (S-Sd-S). Jadi, $DE = D'E'$.
- Akan diselidiki apakah T suatu pemetaan yang bijektif dengan menyelidiki sifat injektif dan surjektifnya T . Ambil $T(C) = T(B) \in h$ akan diselidiki apakah $C = B \in g$. Perhatikan, $T(C) = C'$ dan $T(B) = B'$ akibatnya, $C' = B'$. Karena $C' = B'$ maka $\overleftrightarrow{AC}$ berhimpit dengan $\overleftrightarrow{AB'}$ (ingat kelompok aksioma insidensi euclides bahwa melalui dua titik yang berbeda hanya

bisa dibuat tepat satu garis lurus). Karena $B \in h$ maka pasti ada $B' \in g$ sedemikian sehingga $T(B) = B'$ begitu pula untuk C' sedemikian sehingga $T(C) = C'$ (ini menunjukkan sifat surjektif dari T). A adalah titik tengah dari $\overline{BB'}$ dan A juga merupakan titik tengah dari $\overline{CC'}$ dan $B' = C'$ akibatnya, $B = C$. Jadi T injektif. Dengan demikian T adalah suatu transformasi.

Contoh 1.2

Misalkan diberikan pemetaan β pada bidang Cartesien yang memasangkan (x,y) ke (x, y^3) . Dapat diselidiki bahwa β merupakan suatu transformasi. Perhatikan bahwa oleh β setiap titik $(u, \sqrt[3]{v})$ akan dipetakan ke titik (u,v) . Dengan kata lain, $\beta(u, \sqrt[3]{v}) = (u, v)$.

Contoh 1.3

Misalkan diberikan pemetaan α pada $\mathbb{R}^2$ yang memetakan titik (x,y) ke titik (x^2, y) . Maka α bukanlah suatu transformasi karena tidak ada titik (x,y) sedemikian sehingga $\alpha(x, y) = (-1, 3)$ sehingga α tidak surjektif.

Contoh 1.4

Misalkan diberikan suatu pemetaan γ dengan rumus

$$\gamma(x, y) = \left(-x + \frac{y}{2}, x + 2\right)$$

Misalkan $u = -x + \frac{y}{2}$ dan $v = x + 2$. Akibatnya diperoleh penyelesaian tunggal $x = v - 2$ dan $y = 2u + 2v - 4$ sedemikian sehingga

$$\gamma(x, y) = (u, v)$$

Selanjutnya, dapat diselidiki bahwa γ merupakan suatu transformasi.

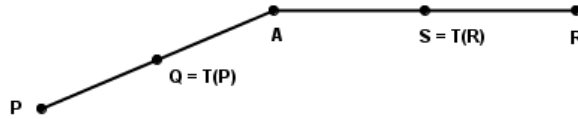
Contoh 1.5

Andaikan $A \in \mathbb{R}^2$. Di definisikan suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathbb{R}^2$ dan daerah nilai $\mathbb{R}^2$ dengan definisi seperti berikut.

1. $T(A) = A$
2. Apabila ada titik lain P selain A maka $T(P) = Q$ dengan Q adalah titik tengah dari $\overline{AP}$.

Selidiki apakah pemetaan tersebut merupakan suatu transformasi.

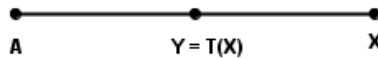
Jawab :



Gambar 1.2

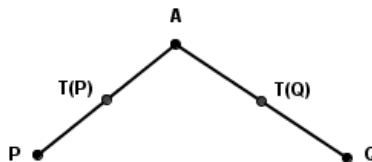
Jelas A memiliki peta yakni A sendiri. Ambil sembarang titik $R \neq A$ pada $\mathbb{R}^2$. Karena $\mathbb{R}^2$ suatu bidang Euclides maka menurut aksioma insidensi ada suatu garis yang melalui A dan R dan tentu pula ada suatu ruas garis $\overline{AR}$ sehingga ada tepat satu titik S diantara A dan R sedemikian sehingga $AS = SR$. Hal ini berarti untuk setiap $X \in \mathbb{R}^2$ ada dengan tunggal Y dengan $Y = T(X)$ yang memenuhi persyaratan (2). Jadi daerah asal dari T adalah $\mathbb{R}^2$.

Untuk menunjukkan T surjektif maka dapat pula ditunjukkan bahwa daerah nilai dari T adalah juga $\mathbb{R}^2$. Untuk hal itu akan diselidiki apakah setiap titik di $\mathbb{R}^2$ memiliki prapeta. Jadi, apabila $Y \in \mathbb{R}^2$ apakah ada $X \in \mathbb{R}^2$ dengan $T(X) = Y$. Menurut ketentuan (1), jika $Y = A$ maka prapetanya adalah Y sendiri sebab $T(A) = A$.



Gambar 1.3

Jika $Y \neq A$ maka ada dengan tunggal X dengan $X \in \overline{AY}$ sehingga $AY = YX$. Jadi Y adalah titik tengah dari $\overline{AX}$ yang merupakan satu-satunya titik tengah. Jadi $Y = T(X)$. Hal ini menunjukkan bahwa X merupakan prapeta dari Y sehingga setiap titik pada $\mathbb{R}^2$ memiliki prapeta. Jadi T surjektif. Untuk menyelidiki apakah T injektif, ambil sembarang dua titik P dan Q dengan $P \neq A, Q \neq A$ dan $P \neq Q$ dan juga P, Q dan A tak segaris. Selanjutnya akan diselidiki kedudukan dari $T(P)$ dan $T(Q)$.



Gambar 1.4

Andaikan $T(P) = T(Q)$. Karena $T(P) \in \overleftrightarrow{AP}$ dan $T(Q) \in \overleftrightarrow{AQ}$ maka dalam hal ini $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ memiliki dua titik sekutu yakni A dan $T(P) = T(Q)$. Ini berarti garis $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ berhimpit yang mengakibatkan $Q \in \overleftrightarrow{AP}$. Ini bertentangan dengan pemisalan bahwa A, P dan Q tak segaris. Jadi pengandaian bahwa $T(P) = T(Q)$ adalah salah. Jadi yang benar adalah $T(P) \neq T(Q)$. Kasus jika A, P dan Q yang segaris dapat dijelaskan secara analog. Dari uraian di atas terlihat bahwa T suatu pemetaan yang injektif dan juga T adalah suatu pemetaan yang surjektif. Jadi T merupakan suatu pemetaan yang bijektif. Kesimpulannya T adalah suatu transformasi.

1.2 Kolineasi

Dalam mempelajari transformasi perlu dikenal adanya unsur-unsur yang bertahan atau tidak berubah (*invariant*) jika dikenakan suatu transformasi padanya. Suatu titik yang bertahan terhadap transformasi disebut dengan titik tetap. Sedangkan garis yang bertahan terhadap transformasi disebut dengan garis tetap. Jika suatu transformasi punya sifat yang demikian maka transformasi tersebut disebut mempertahankan titik atau garis. Suatu sifat yang bertahan terhadap suatu transformasi bila sifat yang berlaku bagi unsur di bidang akan berlaku pula bagi unsur hasil transformasinya.

Definisi 1.10

Suatu transformasi T dikatakan mempertahankan suatu himpunan K jika $T(K) = K$. Transformasi T dikatakan mempertahankan himpunan K titik demi titik (*pointwise*) jika $T(P) = P$ untuk setiap $P \in K$.

Definisi 1.11

Misalkan T suatu transformasi. T disebut suatu kolineasi bila hasil transformasi suatu garis akan berupa garis lagi. Dengan kata lain, jika k suatu garis maka $k' = T(k)$ juga merupakan suatu garis.

Contoh 1.6

Misalkan pemetaan α pada $\mathbb{R}^2$ didefinisikan dengan aturan
 $(x, y) = \alpha(x^2, y)$.

Jelas α bukan merupakan suatu transformasi karena α tidak bijektif, sebab $(-1, 2) \neq (1, 2)$ tetapi $\alpha(-1, 2) = \alpha(1, 2) = (1, 2)$.

Contoh 1.7

Diketahui suatu pemetaan pada $\mathbb{R}^2$ didefinisikan dengan rumus

$$\beta(x, y) = \left(-x + \frac{y}{2}, x + 2\right).$$

- Selidiki apakah β suatu kolineasi ?
- Tentukan dan gambar peta dari $y = x^2$
- Jika ada, tentukan unsur-unsur tetapnya.

Jawab :

- Pemetaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\beta : x' = -x + \frac{y}{2} \text{ dan } y' = x + 2$$

(1)

Pertama akan ditunjukkan dulu β suatu transformasi.

Untuk sembarang $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ maka

$$\beta(x_1, y_1) = \left(-x_1 + \frac{y_1}{2}, x_1 + 2\right) \text{ dan}$$

$$\beta(x_2, y_2) = \left(-x_2 + \frac{y_2}{2}, x_2 + 2\right).$$

Untuk setiap hasil transformasi (x', y') selalu berasal dari tepat satu (x, y) melalui rumus:

$$\beta^{-1} : x = y' - 2 \text{ dan } y = 2(x' + y' - 2)$$

(2)

Ambil sembarang garis $h : ax + by + c = 0$. Oleh β maka h akan dipetakan menjadi

$$h' : a(y' - 2) + b[2(x' + y' - 2)] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow ay' - 2a + 2bx' + 2by' - 4b + c = 0$$

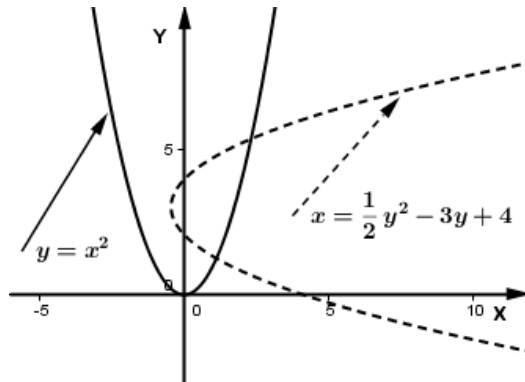
$$\Leftrightarrow 2bx' + (2b + a)y' + (c - 2a - 4b) = 0$$

Hasilnya merupakan suatu garis lagi. Akibatnya β adalah suatu Kolineasi.

- Untuk menentukan peta dari $y = x^2$ substitusikan x dan y pada persamaan (2) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 2(x' + y' - 2) &= (y' - 2)^2 \\
 \Leftrightarrow 2x' + 2y' - 4 &= (y')^2 - 4y' + 4 \\
 \Leftrightarrow 2x' &= (y')^2 - 6y' + 8 \\
 \Leftrightarrow x' &= \frac{1}{2}(y')^2 - 3y' + 4
 \end{aligned}$$

Jadi $y = x^2$ dipetakan menjadi $x = \frac{1}{2}y^2 - 3y + 4$.



Gambar 1.5

- c. Untuk menentukan unsur tetapnya maka dari (1) ambil $x' = x$ dan $y' = y$. Dengan demikian akan diperoleh $x = -x + \frac{y}{2}$ dan $y = x + 2$. Atau $y = 4x$ dan $y = x + 2$. Yang terpenuhi untuk $x = \frac{2}{3}$ dan $y = \frac{8}{3}$. Jadi titik tetapnya adalah $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$.

Untuk menentukan garis tetapnya, untuk $x' = x$ dan $y' = y$, persamaan garis h dan h' harus dibuat identik sehingga diperoleh

$$(ax + by + c = 0) \equiv (2bx + (2b - a)y + (c - 2a - 4b) = 0$$

Yang akan terpenuhi kalau

$$\frac{a}{2b} = \frac{b}{2b-a} = \frac{c}{c-2a-4b}$$

Dari proporsi tersebut diperoleh:

$$2ab - a^2 = 2b^2 \text{ dan } ac - 2a^2 - 4ab = 2bc$$

$$\Leftrightarrow 4ab = 2a^2 + 4b^2 \text{ dan } 2a^2 + 4ab = ac - 2bc$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2a^2 + 4b^2 = ac - 2bc$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = ac - 2bc$$

Persamaan yang terakhir terpenuhi jika $a = b = c = 0$.
Kesimpulannya tidak ada garis yang tetap.

Contoh 1.8

Diberikan suatu pemetaan dengan aturan $f(x, y) = (x, y^3)$. Dapat ditunjukkan bahwa f suatu transformasi tetapi bukan suatu kolineasi sebab garis $y = x$ akan dipetakan menjadi fungsi kubik $y = x^3$

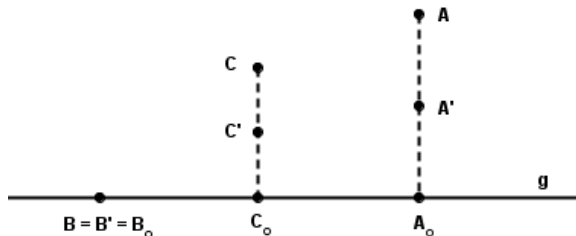
Contoh 1.9

Diberikan garis $g \in \mathbb{R}^2$. Didefinisikan suatu pemetaan T yang membawa $B \in g$ ke B sendiri sedangkan jika titik $A \notin g$ dibawa ke A' sedemikian sehingga $\overleftrightarrow{AA'} \perp g$ dan jika A_0 adalah titik potong $\overleftrightarrow{AA'}$ dengan g jarak berarah dari A' ke A_0 setengah dari jarak berarah dari A ke A_0 .

- Buktikan bahwa T merupakan suatu transformasi.
- Buktikan bahwa T merupakan suatu kolineasi.
- Temukan garis tetapnya jika ada.

Jawab

- Untuk sembarang titik $A \in \mathbb{R}^2$ selalu dapat dilukis $A' = T(A)$ secara tunggal, demikian pula sebaliknya, untuk sembarang $C' \in \mathbb{R}^2$ selalu dapat dilukis kembali prapetanya C secara tunggal. Akibatnya T merupakan suatu transformasi.



Gambar 1.6

- Setiap titik pada garis g adalah titik tetap. Jadi $T(g) = g' = g$ berupa garis lagi. Ambil garis $h \neq g$. Misalkan titik potong