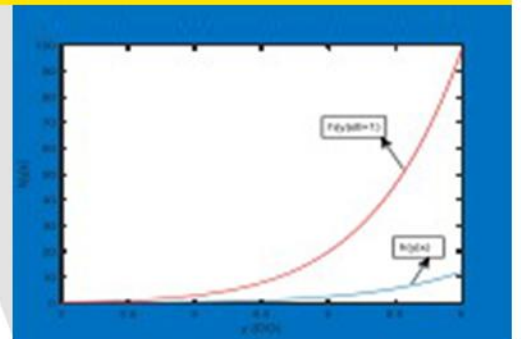


MONOGRAF

PEMODELAN REGRESI WEIBULL PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

*Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah*



MONOGRAF:
PEMODELAN *REGRESI WEIBULL*
PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah



MONOGRAF:

PEMODELAN *REGRESI WEIBULL*

PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

Penulis:
Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah

Editor:
Darnah Andi Nohe
Layouter :
Tim Kreatif PRCI
Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Desember 2022

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
; 18 x 25 cm
ISBN : 978-623-448-337-6

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kami sehingga kami berhasil menyelesaikan Buku dengan judul Monograf: Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam sesuai yang ditargetkan.

Sungai Mahakam memiliki peran penting dalam mendukung kebutuhan masyarakat Provinsi Kalimantan Timur (Kaltim). Kegiatan di sekitar Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam seperti rumah makan, perikanan, industri, pertambangan, dan rumah penduduk berpotensi menimbulkan limbah di aliran sungai. Limbah tersebut dapat mengancam kualitas air Sungai Mahakam dan berpotensi menyebabkan pencemaran air. Pencemaran air Sungai Mahakam merupakan ancaman bagi kesehatan masyarakat Kaltim, oleh karena itu diperlukan pencegahan. Pencegahan yang diusulkan dalam penelitian ini adalah pencegahan secara statistik, yaitu memberikan informasi kepada masyarakat Kaltim mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi potensi pencemaran air Sungai Mahakam melalui pemodelan regresi Weibull. Pemodelan regresi Weibull dalam penelitian ini diterapkan pada data indikator pencemaran air Oksigen Terlarut (*Dissolved Oxygen/DO*). Kami menyadari bahwa Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun selalu kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Akhir kata, kami sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan Buku ini dari awal sampai akhir. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa meridhoi segala usaha kita. Amin.

Desember 2022, Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I SUNGAI MAHAKAM DAN POTENSI PENCEMARANNYA	1
BAB II KONSEP DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINU	5
BAB III KONSEP DISTRIBUSI WEIBULL	6
A. Pengertian Distribusi Weibull	6
B. Penaksiran Parameter Ditribusi Weibull	7
C. Pengujian Distribusi Data	10
D. Model Regresi Weibull	11
E. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull	12
F. Pengujian Parameter Model Regresi Weibull	16
G. Pendeteksian Multikolinieritas	19
H. Interpretasi Model Regresi Weibull	19
I. Pemilihan Model Terbaik	21
BAB IV PEMODELAN REGRESI <i>WEIBULL</i> PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM	22
A. Pendahuluan	22
B. Proses Pemecahan	24
C. Hasil Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam	27
1. Deskripsi Data	28
2. Penaksiran Parameter Distribusi Weibull	29
3. Pengujian Distribusi Data Respon	29
4. Pendeteksian Multikolinieritas Antar Kovariat	30
5. Pemodelan Regresi Weibull	31
a. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull	31
b. Pengujian Parameter Regresi Model Regresi Weibull Secara Serentak	33
c. Pengujian Parameter Regresi Model RW Secara Parsial	34
6. Pemilihan Model Regresi Weibull Terbaik	35
7. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Serentak	37
8. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Parsial	38
9. Interpretasi Model Regresi Weibull pada Data DO Air Sungai Mahakam	40
BAB V PENUTUP	51
DAFTAR PUSTAKA	54

BAB I

SUNGAI MAHAKAM DAN POTENSI PENCEMARANNYA

Sungai Mahakam merupakan sungai terbesar yang membelah provinsi Kalimantan Timur yang bermuara di Selat Makassar. Di bagian hulu, aliran sungai ini melintasi wilayah Kabupaten Kutai Barat dan Kabupaten Kutai Kartanegara sedangkan di bagian hilirnya melintasi Kota Samarinda. Panjang sungai Mahakam mencapai 920 km dengan luas sekitar 149.277 km² dan kedalaman 50 meter di bagian hilir dan sekitar 100 meter di bagian hulu. Sungai Mahakam memiliki beberapa anak sungai, yaitu Sungai Belayan, Sungai Lawa, Sungai Kedang Kepala, Sungai Telen, dan Sungai Tenggarong.

Sungai Mahakam merupakan urat nadi kehidupan masyarakat Kalimantan Timur yaitu sebagai sumber air baku air minum dan air bersih, habitat flora dan fauna perairan, sarana transportasi serta pengendali banjir. Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam merupakan pusat kegiatan banyak pihak, mulai dari sektor industri, pertanian, kehutanan, pertambangan, hingga pusat kegiatan ekonomi masyarakat. Di sepanjang sungai mahakam terdapat bangunan pabrik/industri, penambangan batu baru, serta pemukiman penduduk yang berpotensi menghasilkan limbah domestik maupun non domestik. Aktivitas manusia dalam kehidupan sehari-hari dapat menyebabkan kualitas air sungai terancam tercemar. Dampak pencemaran air berbahaya bagi organisme air dan juga bagi manusia, karena dapat menjadi sarang penyakit.

Air merupakan salah satu sumber daya alam yang memiliki fungsi sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya air yang baik adalah air yang tidak tercemar yang berarti air bersifat netral, sedangkan apabila di dalam perairan terdapat zat pencemar maka sifat air dapat berubah menjadi asam atau basa. Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 82 Tahun 2001, pencemaran air adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi, dan atau komponen lain ke dalam air oleh kegiatan manusia sehingga kualitas turun

sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan air tidak dapat berfungsi sesuai dengan peruntukannya.

Sumber pencemar air sungai dapat dibedakan menjadi sumber domestik dan non domestik. Sumber pencemar domestik (rumah tangga) adalah semua buangan (limbah) yang berasal dari penduduk perkampungan dan kota, pasar, jalan, terminal, rumah sakit, hotel dan restoran. Sumber pencemar non domestik adalah buangan yang berasal dari pabrik, industri, pertanian, perikanan, peternakan, transportasi dan sebagainya. Bentuk pencemar air dapat dibagi menjadi bentuk cair, padat, gas dan kebisingan.

Pencemaran kualitas air dapat menyebabkan ketidakseimbangan ekosistem. Pencemaran tersebut menyebabkan oksigen yang seharusnya digunakan oleh seluruh hewan dan tumbuhan air menjadi berkurang. Berdasarkan Peraturan Pemerintah Nomor 82 Tahun 2001 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air, klasifikasi mutu air ditetapkan menjadi 4 (empat) kelas:

- a. Kelas satu, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk air baku air minum, dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- b. Kelas dua, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk prasarana/sarana rekreasi air, pembudidayaan ikan air tawar, peternakan, air untuk mengairi pertanaman dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- c. Kelas tiga, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk pembudidayaan ikan air tawar, peternakan, air untuk mengairi pertanaman dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- d. Kelas empat, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk mengairi pertanaman atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.

Baku mutu air dari kelas I sampai kelas IV kegunaannya berbeda-beda dalam kehidupan manusia. Golongan kelas I dapat dimanfaatkan sebagai air minum dalam kehidupan sehari-hari. Golongan kelas II yang dimanfaatkan oleh manusia sebagai sarana rekreasi. Golongan kelas III dapat digunakan sebagai pembudidayaan ikan air tawar dan peternakan, sedangkan untuk golongan kelas IV digunakan untuk mengairi pertanian. Dari golongan kelas I sampai kelas IV tersebut menunjukkan bahwa tingkat kejernihan airnya berbeda-beda.

Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air salah satunya adalah *Dissolved Oxygen* (DO) [2]. DO adalah suatu ukuran yang menyatakan banyaknya (kandungan) oksigen yang terlarut dalam air. Kandungan oksigen pada air normal adalah jenuh. DO dalam air akan berkurang jika banyak bakteri pembusuk di dalam air atau banyak zat oksidan di dalam air. Indikator pencemaran air yang lain adalah *Biochemical Oxygen Demand* (BOD). BOD adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia. BOD menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. Jadi nilai BOD tidak menunjukkan jumlah bahan organik yang sebenarnya, tetapi hanya mengukur skala relatif jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi bahan-bahan buangan tersebut. Jika konsumsi oksigen tinggi, yang ditunjukkan dengan semakin kecilnya sisa oksigen terlarut di dalam air, maka berarti kandungan bahan buangan yang membutuhkan oksigen adalah tinggi. Organisme hidup yang bersifat aerobik membutuhkan oksigen untuk proses reaksi biokimia, yaitu untuk mengoksidasi bahan organik, sintesis sel dan oksidasi sel.

Standar baku mutu untuk indikator DO pada pencemaran air Sungai Mahakam ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Indikasi Pencemaran Air Sungai
Berdasarkan *Dissolved Oxygen* (DO)

DO	Indikasi
< 6 mg/l	Tercemar
> 6 mg/l	Tercemar

Sumber : Lampiran VI, PP No. 22 Tahun 2021

Berdasarkan Tabel 2.1, air yang bersih (tidak tercemar) jika memiliki nilai DO kurang dari 6 mg/l, dan jika nilai BOD lebih dari 2 mg/l maka air dikatakan ada indikasi tercemar (Rahmah, Suyitno, Siringoringo, 2021)

BAB II

KONSEP DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINU

Misal Y adalah variabel acak kontinu non negatif, maka fungsi distribusi kumulatif dinotasikan oleh $F(y)$ dan didefinisikan oleh

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(x)dx, \quad (2.1)$$

dengan Y bernilai riil nonnegatif dan f adalah Fungsi Kepadatan Peluang (FKP). Berdasarkan persamaan (2.1), FKP didefinisikan oleh

$$f(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \right] = \frac{dF(y)}{dy}. \quad (2.2)$$

Fungsi *survival* dinotasikan dengan $S(y)$ dan didefinisikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = \int_y^{\infty} f(x)dx, \quad (2.3)$$

dengan $f(y)$ adalah FKP yang diberikan oleh persamaan (2.2). Berdasarkan persamaan (2.1), fungsi *survival* yang diberikan oleh persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam

$$S(y) = 1 - F(y). \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dan (2.4) diperoleh hubungan antara FKP dan fungsi *survival*, yaitu

$$f(y) = -\frac{d}{dy} S(y). \quad (2.5)$$

Fungsi *hazard* dikenal sebagai *hazard rate* yang dinotasikan dengan $h(y)$ (Collet, 2003; Rinne, 2009; Kleinbaum & Klein, 2012) dan didefinisikan oleh

$$h(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y < (y + \Delta y) | Y \geq y)}{\Delta y} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dapat disederhanakan menjadi

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)}. \quad (2.7)$$

BAB III

KONSEP DISTRIBUSI WEIBULL

A. Pengertian Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang memiliki peranan penting dalam analisis *survival*. Distribusi Weibull dengan tiga parameter mempunyai FKP sebagai berikut

$$f(y) = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y - \tau}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{y - \tau}{\eta} \right)^{\gamma} \right], \quad (2.8)$$

dengan $0 \leq y < \infty$; $0 < \gamma, \tau, \eta < \infty$, dimana τ, γ dan η berturut-turut menyatakan parameter lokasi, parameter bentuk dan parameter skala. Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale- shape version*). Berdasarkan persamaan (2.8), jika $\tau = 0$ didapat FKP peubah acak Y berdistribusi Weibull versi skala-bentuk, yaitu (Rinne, 2009)

$$f(y) = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{y}{\eta} \right)^{\gamma} \right]. \quad (2.9)$$

FKP yang diberikan oleh persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(y) = \lambda \gamma y^{\gamma-1} \exp \left[- \lambda y^{\gamma} \right], \quad (2.10)$$

dengan $\lambda = \eta^{-\gamma}$ (Collet, 2003; Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Lawless, 2003). Berdasarkan persamaan (2.1), (2.5) dan (2.10) fungsi distribusi kumulatif dan fungsi *survival* ditribusi Weibull versi skala-bentuk berturut-turut adalah

$$F(t) = 1 - \exp \left(- \lambda t^{\gamma} \right), \quad (2.11)$$

dan

$$S(t) = \exp \left(- \lambda t^{\gamma} \right). \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), (2.10) dan (2.12) fungsi *hazard* distribusi Weibull versi skala-bentuk (Collet, 2003; Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Lawless, 2003) adalah

$$h(t) = \gamma \lambda t^{\gamma-1}.$$

Berdasarkan persamaan (2.10), momen ke $-r$ dan *mean* (ekspektasi) dari peubah acak Y berturut-turut (Rinne, 2009; Suyitno, 2017) adalah

$$E(Y^r) = \int_0^{\infty} y^r f(y) dy = \lambda^{-\frac{r}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + 1\right),$$

dan

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right). \quad (2.14)$$

Salah satu metode penaksiran parameter distribusi Weibull dengan FKP diberikan oleh persamaan (2.10) adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

B. Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Metode penaksiran parameter distribusi Weibull yang dibahas pada penelitian ini adalah MLE. Metode MLE merupakan metode penaksiran parameter dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misal diberikan n data pengamatan variabel Y , yaitu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ yang saling bebas dan berdistribusi identik, yaitu $y_i \sim W(\lambda, \gamma), i = 1, 2, 3, \dots, n$. Fungsi *likelihood* berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (2.11), didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= \prod_{i=1}^n f(\theta_0 | y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda \gamma y_i^{\gamma-1} \exp[-\lambda y_i^{\gamma}], \end{aligned} \quad (2.15)$$

dengan $\theta_0 = [\lambda \quad \gamma]^T$. Penaksir *Maximum Likelihood* (ML) dari θ_0 adalah $\hat{\theta}_0$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* (2.14), dan juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood*, karena maksimum kedua fungsi tersebut dicapai pada titik

yang sama, yaitu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$. Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* (2.15) adalah

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) &= \ln [L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})] = \ln \left(\prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{\theta}_0 | y_i) \right) = \sum_{i=1}^n \ln f(\boldsymbol{\theta}_0 | y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln(\lambda \gamma y_i^{\gamma-1} \exp[-\lambda y_i^\gamma]) \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln \lambda + \ln \gamma + (\gamma-1) \ln y_i - \lambda y_i^\gamma] \quad (2.16)\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* diperoleh dari turunan pertama fungsi *log-likelihood* (2.15) terhadap semua parameter dan disamakan dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi 2 dan persamaan (2.17) dinamakan persamaan *likelihood*. Ruas kiri persamaan (2.17) adalah vektor gradien berdimensi 2, yaitu

$$\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_0}. \quad (2.18)$$

Bentuk umum komponen-komponen vektor gradien (2.18) berturut-turut adalah

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\lambda} - y_i^\gamma \right], \quad (2.19)$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \lambda y_i^\gamma \ln y_i \right]. \quad (2.20)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20), persamaan *likelihood* (2.17) merupakan sistem persamaan non-linier yang saling bergantung, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode untuk mendapatkan penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$) adalah metode iteratif

Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Vektor gradien diberikan oleh persamaan (2.18) dan matriks Hessian adalah matriks turunan parsial orde ke-2 dari fungsi *log-likelihood* (2.16) terhadap semua kombinasi semua parameter, dengan bentuk umum sebagai berikut

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}_{2 \times 2}. \quad (2.21)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20) elemen-elemen matriks Hessian (2.21) berturut-turut adalah

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\lambda} - y_i^\gamma \right] \right] = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \lambda y_i^\gamma \ln(y_i) \right] = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\gamma^2} - \lambda (\ln y_i)^2 y_i^\gamma \right]; \quad (2.23)$$

dan

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} - y_i^\gamma \right] \right] = -\sum_{i=1}^n y_i^\gamma \ln y_i. \quad (2.24)$$

Berdasarkan hasil perhitungan vektor gradien (2.18) dan matriks Hessian (2.21), algoritma iterasi Newton-Raphson (Khuri, 2003) untuk mendapatkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{q+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)} - \left[\mathbf{H}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)}) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)}), q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Proses iterasi dimulai dari penentuan harga awal $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda^{(0)} & \gamma^{(0)} \end{bmatrix}$ dan iterasi dihentikan pada iterasi ke- $q+1$ jika dipenuhi kondisi konvergen, yaitu jika $\left\| \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)} \right\| < \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan riil non-negatif yang cukup kecil misalnya 10^{-6} . (Suyitno, 2017)

C. Pengujian Distribusi Data

Salah satu metode pengujian distribusi data adalah metode nonparametrik Kolmogorov-Smirnov. Misal $\hat{F}(y)$ adalah penaksir fungsi distribusi kumulatif yang diberikan oleh persamaan (2.11). Hipotesis pengujian distribusi data menggunakan metode nonparametrik Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut

$$H_0 : F(y) = \hat{F}(y)$$

(Data mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif adalah $\hat{F}(y)$)

$$H_1 : F(y) \neq \hat{F}(y)$$

(Data tidak mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif adalah $\hat{F}(t)$)

Statistik uji diberikan oleh

$$D = \max\{D_F, D_S\} \quad (2.26)$$

dengan

$$\begin{aligned} D_F &= \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}(y_i) - F^*(y_i)|; \\ D_S &= \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{S}(y_i) - S^*(y_i)| \end{aligned} \quad (2.27)$$

dan

$$\begin{aligned} F^*(y_i) &= \frac{\text{banyaknya data variabel } Y \text{ yang } \leq y_i}{n}; \\ S^*(y_i) &= \frac{\text{banyaknya data variabel } Y \text{ yang } \geq y_i}{n}. \end{aligned}$$

$\hat{F}(t)$ dan $\hat{S}(y)$ pada persamaan (2.27) adalah masing-masing adalah fungsi distribusi yang dihipotesiskan dan fungsi *survival* yang diperoleh dari penaksiran parameter distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif diberikan oleh persamaan (2.11). $F^*(y)$ dan $S^*(y)$ berturut-turut adalah fungsi