

PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA



**Misbah | Samuel Juliardi Sinaga | Nurlaela Muhammad
Nadrah | Ismadi Sihombing | Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian**



PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

Misbah, S.Pd., M.Pd
Samuel Juliardi Sinaga, S.Pd., M.Pd
Nurlaela Muhammad, S.Pd., M.Pd
Dr. Nadrah, M.Pd
Ismadi Sihombing, S.Pd., M.Pd
Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian



PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Misbah, S.Pd., M.Pd
Samuel Juliardi Sinaga, S.Pd., M.Pd
Nurlaela Muhammad, S.Pd., M.Pd
Dr. Nadrah, M.Pd
Ismadi Sihombing, S.Pd., M.Pd
Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian

Editor:

Dr. Sepriandison Saragih. M.Si

Cetakan Pertama: September 2022

Cover: Tim Kreatif PRCI

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
Dimensi : 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-448-203-4

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena kebaikan, dan kasih karunia-Nya lah, sehingga kami dari tim penulis dapat menyelesaikan buku pembelajaran ini sesuai dengan pada waktunya. Adapun kami dari penulis menulis buku ini dengan tujuan membuat buku ajar yang berisi materi dari Persamaan differensial dalam fisika secara garis besar, yaitu; Konsep dasar differensial dan Integral, Persamaan differensial biasa orde satu Persamaan differensial biasa orde dua, Persamaan differensial Parsial, Analisis Vektor, Dan Fungsi Khusus. Dalam penyelesaian buku ajar ini, penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak, sehingga dalam kesempatan ini perkenankan penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah ikut membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung. Semoga Tuhan yang Maha Kuasa senantiasa membalas kebaikan dan bantuannya. Buku ini ditujukan untuk mahasiswa ilmu sains dan teknologi, terkhusus fisika dan matematika. Buku ini juga memiliki sasaran utama untuk memberikan suatu penyajian yang jelas dan logis mengenai konsep-konsep dan prinsip-prinsip kalkulus dan matematika. Penulis juga coba menyajikan contoh-contoh praktis yang mendemonstrasikan peran fisika dan matematika dalam kejadian kehidupan sehari-hari secara umum dan peran fisika dan matematika dalam ilmu-ilmu lainnya secara

umum. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan materi perkuliahan ini. Oleh karena itu saran dan kritik dari semua pihak untuk perbaikan dan pengembangan selanjutnya sangat diharapkan.

Hormat

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
BAB I KONSEP DASAR DIFFERENSIAL DAN INTEGRAL	1
1.1 Differensial	4
a. Istilah Terkait dalam Kalkulus Diferensial	5
b. Contoh Dasar Kalkulus Diferensial	7
c. Rumus Kalkulus Diferensial	7
d. Persamaan Kalkulus Diferensial	11
e. Aturan Kalkulus Diferensial	12
f. Soal latihan kalkulus differensial	13
1.2 Integral.....	14
a. Teorema Dasar Pertama Kalkulus Integral ...	16
b. Teorema Dasar Kedua Kalkulus Integral.....	16
c. Jenis-Jenis Integral.....	16
d. Integral tak tentu	17
e. Integral tentu	17
f. Sifat-sifat Kalkulus Integral	18
g. Rumus Integral	18
h. Metode untuk Menemukan Integral	20
i. Aplikasi Kalkulus Integral	20
j. Soal latihan kalkulus Integral.....	21
BAB II PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA ORDE SATU	23
2.1 Integral Langsung	24
a. Pengantar.....	25

b. Teori.....	26
c. Contoh soal	26
d. Standar Integral.....	27
2.2 Separasi Variabel.....	28
a. Teori.....	28
b. Soal latihan	28
2.3 Separasi Variabel.....	29
a. Definisi	29
2.4 Differensial Keeksakan	30
a. Algoritma untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Eksak.....	30
b. Soal latihan	31
2.5 Metode Faktor Integral	32
a. Latihan soal.....	33
b. Notasi alternatif	33
2.6 Persamaan Differensial Linear	34
a. Derivasi untuk Solusi Persamaan Diferensial Linier.....	35
b. Rumus untuk Solusi Umum Persamaan Diferensial Linier.....	37
c. Latihan soal.....	38
2.7 Persamaan differensial Homogen dan non-Homogen	38
a. Persamaan Diferensial Nonhomogen	40
b. Langkah-Langkah Menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen.....	40
c. Soal latihan	41
2.8 Persamaan differensial bernoulli	42
a. Soal latihan	42

BAB III PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA ORDE	
DUA	45
3.1 Koefisien konstan persamaan differensial linier orde kedua.....	45
3.2 Menemukan fungsi komplementer	46
3.3 Integral tertentu.....	46
3.4 Menemukan solusi umum dari linear orde kedua ODE tidak homogen	47
3.5 Sirkuit LC dengan input sinusoidal	47
3.6 Suku tidak homogen dalam fungsi komplementer	49
BAB IV PERSAMAAN DIFFERENSIAL	
SEBAGIAN/PARSIAL	51
4.1 Mewakili Persamaan Diferensial Parsial	52
4.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial	53
4.3 Jenis Persamaan Diferensial Parsial	54
4.4 Persamaan laplace.....	55
a. Pengantar.....	55
b. Fungsi Laplace	58
c. Properti laplace	67
BAB V ANALISIS VEKTOR	79
5.1 Dasar Aljabar Vektor	79
a. Skalar	80
b. Vektor	81
c. Aljabar Vektor	82
d. Produk Titik (Dot Product)	84
e. Produk silang (Cross Product)	86
f. Produk Skalar Tiga Kali Lipat	87
5.2 Differensial Vektor	88
a. Fungsi bernilai vektor	88

b. Persamaan kurva parametrik.....	88
c. Diferensiasi fungsi bernilai vektor.....	92
d. Bidang vektor dan skalar	93
e. Berbagai jenis turunan differensial	94
f. Gradient ("perkalian dengan skalar")	96
g. Divergensi medan vektor ("produk skalar") ..	97
BAB VI FUNGSI KHUSUS.....	99
6.1 Fungsi Gamma.....	102
6.2 Fungsi beta.....	106
6.3 Integral beta lainnya	109
a. Integral beta kedua.....	110
b. Integral beta ketiga (Cauchy).....	110
c. Kontur kompleks untuk integral beta	111
d. Rumus refleksi Euler	113
e. Integral kontur ganda.....	114
6.4 Fungsi hipergeometrik.....	115
a. Definisi	115
6.5 Representasi integral Euler.....	119
6.6 Dua hubungan fungsional.....	121
6.7 Representasi integral kontur	123
6.8 Persamaan diferensial hipergeometrik	124
6.9 Pemisahan variabel dan fungsi khusus.....	125
a. Pemisahan Variabel untuk persamaan panas	126
b. Pemisahan Variabel untuk masalah kuantum	127
c. Pemisahan Variabel lain untuk masalah kuantum	129
DAFTAR PUSTAKA	131
BIONARASI.....	137

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Turunan orde tinggi.....	11
Tabel 1.2 Aturan Kalkulus Diferensial	12

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Grafik fungsi differensial	5
Gambar 1.2 Integral sebagai luas dibawah kurva	15
Gambar 1.3 Integral tertentu	17
Gambar 2.1 Rumus Standar Integral.....	27
Gambar 2.2 Persamaan differensial linear pada y (Atas), dan pada x (Bawah).....	35
Gambar 3.1 Sirkuit LC	47
Gambar 5 1. (a) sebuah vektor; (b) penjumlahan vektor	81
Gambar 5.2 (a) negatif dari suatu vektor; (b) pengurangan vektor	83
Gambar 5.3 Vektor yang sama.....	84
Gambar 5.4 Dot Product	85
Gambar 5.5 Proyeksi vektor sepanjang arah vektor satuan.....	85
Gambar 5.6 Proyeksi vektor sepanjang arah vektor satuan.....	86
Gambar 5.7 Contoh perkalian silang.....	87
Gambar 5.8 Contoh perkalian silang.....	92
Gambar 5.9 Medan vektor mewakili kecepatan fluida	94
Gambar 5.10 Divergensi positif dan negatif	98
Gambar 6.1 Grafik nilai absolut fungsi Gamma dari variabel kompleks $z = x + iy$ dari sistem aljabar komputer MuPAD. Ada kutub terlihat di $z = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$	103

BAB I

KONSEP DASAR DIFFERENSIAL DAN INTEGRAL

Kalkulus adalah cabang matematika yang melibatkan studi tentang tingkat perubahan. Sebelum kalkulus ditemukan, semua matematika bersifat statis: hanya dapat membantu menghitung objek yang diam sempurna Utari & Utami, (2020);Mkhatshwa, (2020). Tapi alam semesta terus bergerak dan berubah. Tidak ada objek dari bintang di ruang angkasa hingga partikel subatom atau sel di dalam tubuh yang selalu diam. Memang, hampir semua hal di alam semesta terus bergerak. Kalkulus membantu menentukan bagaimana partikel, bintang, dan materi benar-benar bergerak dan berubah secara real time. Kalkulus digunakan dalam banyak bidang yang biasanya tidak Anda pikirkan akan menggunakan konsepnya. Diantaranya adalah fisika, teknik, ekonomi, statistik, dan kedokteran. Kalkulus juga digunakan di area yang berbeda seperti perjalanan ruang angkasa, serta menentukan bagaimana obat berinteraksi dengan tubuh, dan bahkan bagaimana membangun struktur yang lebih aman. Anda akan mengerti mengapa kalkulus berguna di banyak bidang jika Anda tahu sedikit tentang sejarahnya serta apa yang dirancang untuk dilakukan dan diukur (Frank & Thompson, 2021).

Adapun kalkulus dikembangkan pada abad ke-17 oleh dua matematikawan, yaitu; Gottfried Leibniz dan Isaac Newton.

Newton pertama kali mengembangkan kalkulus dan menerapkannya secara langsung pada pemahaman sistem fisika (Simmons, 2021). Secara mandiri, Leibniz mengembangkan notasi yang digunakan dalam kalkulus. Sederhananya, sementara matematika dasar menggunakan operasi seperti plus, minus, waktu, dan pembagian (+, -, x, dan ;), kalkulus menggunakan operasi yang menggunakan fungsi dan integral untuk menghitung laju perubahan. Alat-alat itu memungkinkan Newton, Leibniz, dan matematikawan lain yang mengikutinya untuk menghitung hal-hal seperti kemiringan kurva yang tepat di titik mana pun (Hyder & Soliman, 2021). Kisah Matematika menjelaskan pentingnya teorema dasar kalkulus Newton:

"Tidak seperti geometri statis orang Yunani, kalkulus memungkinkan ahli matematika dan insinyur untuk memahami gerakan dan perubahan dinamis di dunia yang terus berubah di sekitar kita, seperti orbit planet, gerakan cairan, dll."

Dengan menggunakan kalkulus, para ilmuwan, astronom, fisikawan, matematikawan, dan ahli kimia sekarang juga dapat memetakan orbit planet dan bintang, serta jalur elektron dan proton pada tingkat atom. Ada dua cabang kalkulus: kalkulus diferensial dan integral. Cabang ini berkaitan dengan studi tentang laju perubahan fungsi sehubungan dengan variabelnya, terutama melalui penggunaan turunan dan diferensial. Turunan adalah kemiringan garis pada grafik (ALAM, 2020).

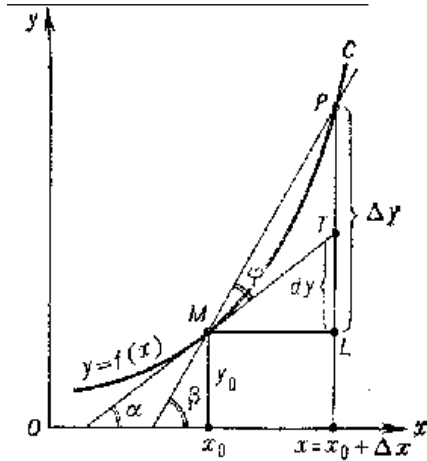
Kalkulus integral, sebaliknya, berusaha menemukan kuantitas di mana laju perubahan diketahui. Cabang ini berfokus pada konsep seperti kemiringan garis singgung dan kecepatan. Sementara kalkulus diferensial berfokus pada kurva itu sendiri, kalkulus integral berkaitan dengan ruang atau area di bawah kurva. Kalkulus integral digunakan untuk menghitung ukuran atau nilai total, seperti panjang, luas, dan volume. Kalkulus memainkan peran integral dalam pengembangan navigasi pada abad ke-17 dan ke-18 karena memungkinkan pelaut menggunakan posisi bulan untuk menentukan waktu setempat secara akurat. Untuk memetakan posisi mereka di laut, navigator harus mampu mengukur waktu dan sudut dengan akurat. Sebelum pengembangan kalkulus, navigator dan kapten kapal tidak dapat melakukan keduanya. Kalkulus baik turunan maupun integral membantu meningkatkan pemahaman konsep penting ini dalam hal kurva Bumi, jarak yang harus ditempuh kapal di sekitar kurva untuk mencapai lokasi tertentu, dan bahkan keselarasan Bumi, laut, dan kapal dalam kaitannya dengan bintang-bintang (Hyder, 2021).

Kalkulus memiliki banyak aplikasi praktis dalam kehidupan nyata. Beberapa konsep yang menggunakan kalkulus antara lain gerak, listrik, panas, cahaya, harmonik, akustik, dan astronomi. Kalkulus digunakan dalam geografi, visi komputer (seperti untuk mengemudi mobil secara otonom), fotografi, kecerdasan buatan, robotika, video game, dan bahkan film. Kalkulus juga digunakan untuk menghitung tingkat peluruhan radioaktif dalam kimia, dan bahkan untuk memprediksi tingkat kelahiran dan kematian, serta dalam

studi gravitasi dan gerakan planet, aliran fluida, desain kapal, kurva geometris, dan teknik jembatan. Dalam fisika, misalnya, kalkulus digunakan untuk membantu mendefinisikan, menjelaskan, dan menghitung gerak, listrik, panas, cahaya, harmonik, akustik, astronomi, dan dinamika. Teori relativitas Einstein bergantung pada kalkulus, bidang matematika yang juga membantu para ekonom memprediksi berapa banyak keuntungan yang dapat diperoleh perusahaan atau industri. Dan dalam pembuatan kapal, kalkulus telah digunakan selama bertahun-tahun untuk menentukan baik kurva lambung kapal (menggunakan kalkulus diferensial), serta area di bawah lambung (menggunakan kalkulus integral), dan bahkan dalam desain umum kapal. . Selain itu, kalkulus digunakan untuk memeriksa jawaban untuk berbagai disiplin ilmu matematika seperti statistik, geometri analitik, dan aljabar (Tarasov, 2020).

1.1 Differensial

Kalkulus diferensial melibatkan pencarian turunan suatu fungsi dengan proses diferensiasi. Turunan suatu fungsi pada nilai tertentu akan memberikan laju perubahan fungsi yang mendekati nilai tersebut. Turunan digunakan untuk mengukur kemiringan garis singgung pada grafik suatu fungsi (Kidron, 2020).



Gambar 1.1 Grafik fungsi differensial

a. Istilah Terkait dalam Kalkulus Differensial

Adapun dalam Kalkulus diferensial merupakan ilmu yang mempelajari laju perubahan suatu besaran terikat terhadap perubahan suatu besaran bebas. Misalnya, kecepatan suatu benda yang bergerak dapat diartikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi maka, menurut kalkulus diferensial, notasinya diberikan sebagai $f'(x) = dy/dx$. Adapun beberapa istilah penting yang terkait dengan kalkulus diferensial tercantum di bawah ini:

- **Fungsi**

Fungsi didefinisikan sebagai relasi biner di mana setiap input dipetakan ke tepat satu output. $y = 4x + 3$ adalah contoh fungsi. Di sini, x (input) adalah variabel independen, dan y (output) adalah variabel dependen.

- **Variabel bebas**

Dalam suatu fungsi, variabel yang berperan sebagai input disebut dengan variabel bebas. Dalam model matematika, variabel yang dimanipulasi adalah variabel bebas.

- **Variabel tidak bebas**

Variabel dalam fungsi yang mewakili output dikenal sebagai variabel dependen. Nilai variabel ini berubah sehubungan dengan perubahan variabel dependen. Dengan kata lain, nilai suatu variabel terikat ditentukan oleh suatu variabel bebas.

- **Domain dan Range**

Dalam kalkulus diferensial, domain dapat didefinisikan sebagai daftar semua nilai input sedangkan range adalah semua nilai output yang diperoleh setelah menerapkan input ke suatu fungsi. Misal $y = 2x + 3$. Misalkan domainnya $\{0, 1, 2\}$ maka rangenya adalah sebagai berikut:

$$y=2(0)+3=3$$

$$y=2(1)+3=5$$

$$y=2(2)+3=7$$

Maka range yang didapatkan adalah; $\{3, 5, 7\}$

- **Limit**

Turunan dapat didefinisikan dengan konsep limit. Dalam kalkulus diferensial, batas menggambarkan nilai suatu fungsi saat mendekati nilai input tertentu.

- **Derivatif**

Dalam kalkulus diferensial, turunan digunakan untuk mencari laju perubahan suatu fungsi. Jika garis singgung ditarik ke suatu titik yang terletak pada grafik suatu fungsi maka kemiringan garis singgung akan memberikan turunan fungsi pada titik di mana garis singgung menyentuh kurva. turunan dari suatu fungsi, $f(x)$, direpresentasikan sebagai $f'(x)$, dy/dx , df/dx .

b. Contoh Dasar Kalkulus Diferensial

Misalkan ada fungsi yang diberikan sebagai $f(x) = 5x^2$. Kemiringan fungsi ini pada titik tertentu, katakanlah 5, dapat ditentukan dengan menggunakan kalkulus diferensial. Turunan dari fungsi ini adalah $f'(x) = 10x$. Maka kita dapat mensubstitusikan nilai 5 dalam persamaan ini untuk mendapatkan $f'(x) = 50$. Jadi, kemiringan garis singgung di $x = 5$ adalah 10.

c. Rumus Kalkulus Diferensial

Rumus yang berbeda untuk kalkulus diferensial digunakan untuk menemukan turunan dari berbagai jenis fungsi. Menurut definisi, turunan dari suatu fungsi dapat ditentukan sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Adapun rumus kalkulus diferensial penting untuk berbagai fungsi diberikan di bawah ini:

- **Fungsi Dasar**

1) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

2) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$, dimana $a > 0$, dan $a \neq 0$

3) $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, dimana untuk $x > 0$

4) $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- **Fungsi Triginometri**

1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$, $x \neq (2n+1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$

4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

5) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$, $x \neq (2n+1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$

6) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

- **Fungsi Hyperbolik**

- 1) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
- 2) $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
- 3) $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
- 4) $\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{cosec}^2 x$
- 5) $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
- 6) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \coth x$

- **Fungsi Invers Trigonometri**

- 1) $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$
- 2) $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$
- 3) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- 4) $\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- 5) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
- 6) $\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

- **Fungsi Invers hiperbolik Trigonometri**

$$1) \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2) \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3) \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$4) \frac{d}{dx} \coth^{-1} x = -\frac{1}{x(1 - x^2)}$$

$$5) \frac{d}{dx} \operatorname{cosech}^{-1} x = -\frac{1}{x(\sqrt{1 + x^2})}$$

$$6) \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x(\sqrt{1 - x^2})}$$

- **Derivatif Orde Tinggi**

Turunan digunakan untuk menyatakan laju perubahan suatu fungsi. Untuk mencari laju perubahan turunan ini, digunakan turunan orde tinggi (Avez, 2020). Tabel yang diberikan di bawah ini mencantumkan turunan orde tinggi yang paling umum digunakan untuk suatu fungsi, $y = f(x)$, dalam kalkulus diferensial:

Tabel 1.1 Turunan orde tinggi

<i>Urutan Turunan</i>	<i>Turunan Orde Pertama</i>	<i>Turunan Orde Kedua</i>	<i>Turunan Orde ketiga</i>
Notasi	$y = f'(x)$	$y = f''(x)$	$y = f'''(x)$
Interpretation	$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3(f(x))}{dx^3}$
Contoh: $\sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f''(x) = -\sin x$	$f'''(x) = -\cos x$

d. Persamaan Kalkulus Diferensial

Persamaan kalkulus diferensial atau persamaan diferensial sederhana adalah persamaan yang menghubungkan fungsi dengan turunannya. Ada dua jenis utama persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya memiliki satu variabel bebas dan persamaan tersebut mengandung satu atau lebih turunan terhadap variabel tersebut. Persamaan diferensial parsial terdiri dari satu atau lebih variabel bebas dan turunan parsialnya.

Dalam kalkulus diferensial, ada tiga rumus umum untuk persamaan diferensial. Ini diberikan di bawah ini:

- $\frac{dy}{dx} = f(x)$
- $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- $x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$

e. Aturan Kalkulus Diferensial

Jika turunan dari fungsi sederhana tertentu diketahui maka aturan kalkulus diferensial dapat digunakan untuk mencari turunan dari fungsi yang rumit. Aturan kalkulus diferensial tercantum dalam tabel yang diberikan di bawah ini.

Tabel 1.2 Aturan Kalkulus Diferensial

<i>Aturan Kalkulus Diferensial</i>	<i>Fungsi</i>	<i>Interpretasi</i>
<i>Aturan konstan</i>	$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$
<i>Aturan multi Konstan</i>	$y = cf(x)$	$\frac{dy}{dx} = cf'(x)$
<i>Aturan pangkat</i>	$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
<i>Generalisasi aturan pangkat</i>	$y = [f(x)]^n$	$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
<i>Jumlah Dua Fungsi</i>	$y = f(x) + g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$
<i>Perbedaan Dua Fungsi</i>	$y = f(x) - g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) - g'(x)$
<i>Aturan Produk</i>	$y = f(x)g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
<i>Aturan Hasil Bagi</i>	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$
<i>Aturan Rantai untuk Fungsi Komposit</i>	$y = f[g(x)]; y = f(u), u = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'[g(x)]g'(x)$

f. Soal latihan kalkulus differensial

1. Turunan fungsi pertama dari $f(x) = (4x^2 - 12x)(x + 2)$ adalah...
2. Diketahui $f(x) = ax^2 + 2x + 4$ dan $g(x) = x^2 + ax - 2$.
Jika $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan $h'(0) = 1$ maka nilai a adalah...
3. Diketahui $f(x) = ax^2 - 4x + 1$ dan $g(x) = 3x^2 + ax + 2$,
jika $h(x) = f(x) + g(x)$ dan $k(x) = f(x)g(x)$ dengan
 $h'(0) = -3$, maka nilai $k'(0)$ adalah...
4. Jika $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1$ maka $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \dots$
5. Turunan pertama dari $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x\sqrt{x}}$ adalah...
6. Turunan pertama fungsi $y = \frac{2}{\sqrt{(3x^2 + 5)^3}}$ adalah $y' = \dots$
7. Diketahui $f(0) = 1$ dan $f'(0) = 2$, jika
 $g(x) = \frac{1}{(2f(x) - 1)^3}$ maka $g'(0) = \dots$
8. Jika $f(x) = \frac{bx - a}{x + b}$, memenuhi $f(1) = 1$ dan $f'(1) = 2$
maka $f(2) = \dots$
9. Jika $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ dengan $f(0) = f'(0)$ dan $f'(-1) = 1$,
maka $a + b = \dots$

10. Jika f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan di $\mathbb{R}$

sehingga $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)(g(x)-g(x+h))}{k^2 h} = \frac{x-1}{k}$ dan

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)(f(x)-f(x+h))}{(k^2-1)h} = \frac{x-1}{k+1}$ untuk $k > 0$, maka...

$$(1) (fg)'(0) = 2k - 1$$

$$(2) (fg)'(c) = (2k - 1)(c - 1)$$

$$(3) (fg)'(x+1) = (1 - 2k)x$$

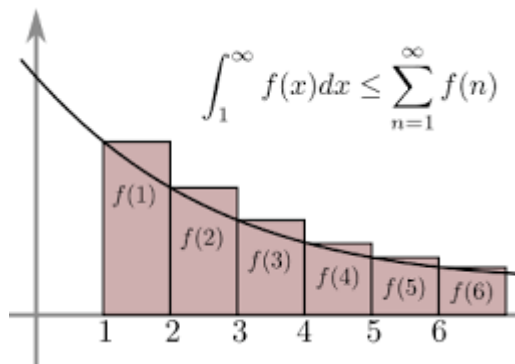
$$(4) (fg)'(x^2) = (2k - 1)(x^2 - 1)$$

1.2 Integral

Kalkulus integral membantu dalam menemukan anti-turunan suatu fungsi. Anti-turunan ini juga disebut integral fungsi. Proses mencari anti turunan dari suatu fungsi disebut integrasi. Proses kebalikan dari mencari turunan adalah mencari integral. Integral suatu fungsi mewakili keluarga kurva (Vivas-Cortez et al., 2020). Menemukan turunan dan integral membentuk kalkulus dasar. Dalam topik ini, kita akan membahas dasar-dasar integral dan mengevaluasi integral. Integral adalah nilai-nilai fungsi yang ditemukan oleh proses integrasi. Proses mendapatkan $f(x)$ dari $f'(x)$ disebut integrasi. Integral menetapkan angka ke fungsi dengan cara yang menggambarkan masalah perpindahan dan gerak, masalah luas dan volume, dan sebagainya yang muncul dengan menggabungkan semua data kecil. Mengingat turunan f' dari fungsi f , kita dapat menentukan

fungsi f . Di sini, fungsi f disebut antiturunan atau integral dari f' (Magnus & Neudecker, 2019).

$F(x)$ disebut antiturunan atau integral Newton-Leibnitz atau primitif dari suatu fungsi $f(x)$ pada interval I . $F'(x) = f(x)$, untuk setiap nilai x dalam I . Integral adalah representasi luas daerah di bawah kurva. Kami memperkirakan nilai sebenarnya dari integral dengan menggambar persegi panjang. Integral tertentu dari suatu fungsi dapat dinyatakan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh grafiknya dari fungsi yang diberikan antara dua titik pada garis. Luas suatu daerah ditemukan dengan memecahnya menjadi persegi panjang vertikal tipis dan menerapkan batas bawah dan atas, luas daerah dijumlahkan. Kami menentukan integral dari suatu fungsi selama interval di mana integral didefinisikan (Radmehr & Drake, 2020).



Gambar 1.2 Integral sebagai luas dibawah kurva

Kami mendefinisikan integral sebagai fungsi dari area yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sumbu x , dan

ordinat $x = a$ dan $x = b$, di mana $b > a$. Misalkan x adalah titik tertentu di $[a, b]$. Kemudian mewakili fungsi area. Konsep fungsi area ini mengarah pada teorema dasar kalkulus integral.

a. Teorema Dasar Pertama Kalkulus Integral

$A(x) =$ untuk semua $x \geq a$, dimana fungsi kontinu pada $[a, b]$. Kemudian $A'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a, b]$.

b. Teorema Dasar Kedua Kalkulus Integral

Jika f adalah fungsi kontinu dari x yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$ dan F menjadi fungsi lain sedemikian sehingga $d/dx F(x) = f(x)$ untuk semua x dalam domain f , maka $F(b) - F(a)$. Ini dikenal sebagai integral tertentu dari f pada rentang $[a, b]$, a adalah batas bawah dan b batas atas.

c. Jenis-Jenis Integral

Kalkulus integral digunakan untuk menyelesaikan masalah jenis berikut.

- masalah menemukan fungsi jika turunannya diberikan.
- masalah menemukan area yang dibatasi oleh grafik fungsi dalam kondisi tertentu. Dengan demikian kalkulus Integral dibagi menjadi dua jenis:
 1. Integral Pasti (nilai integralnya pasti)
 2. Integral tak tentu (nilai integral tak tentu dengan konstanta sembarang, C)

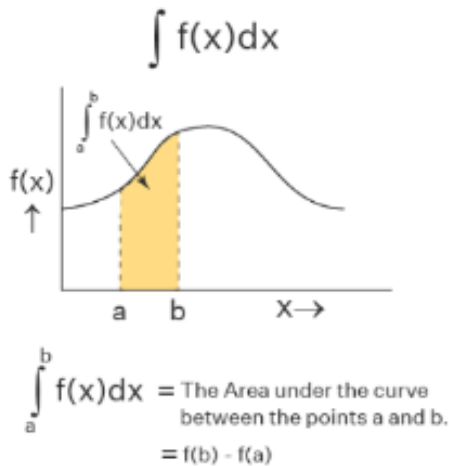
d. Integral tak tentu

Ini adalah integral yang tidak memiliki nilai limit yang sudah ada sebelumnya; sehingga membuat nilai akhir integral tak tentu. $\int g'(x)dx = g(x) + c$. Integral tak tentu termasuk dalam keluarga kurva paralel.

e. Integral tentu

Integral tertentu memiliki nilai batas yang sudah ada sebelumnya, sehingga membuat nilai akhir integral tertentu menjadi pasti. jika $f(x)$ adalah fungsi kurva, maka

Definite Integral



Gambar 1.3 Integral tertentu