



SUATU KAJIAN LITERATUR

PEMODELAN MATEMATIKA

EDITOR: YUSUF FUAD

AMINAH EKAWATI-ANIS FARIDA JAMIL-ARI
SRIANTINI-BLANDINA SEKO BANI-LUTHFIANA
TARIDA-MAYANG DINTARINI-MOHAMMAD AUZA'I
AQIB-NASRUDDIN-OVAN-SRI IRAWATI-
SYAMSULRIZAL

SUATU KAJIAN LITERATUR PEMODELAN MATEMATIKA

Suatu Kajian Literatur Pemodelan Matematika

**Aminah Ekawati
Anis Farida Jamil
Ari Srientini
Blandina Seko Bani
Luthfiana Tarida
Mayang Dintarini
Mohammad Auza'i Aqib
Nasruddin
Ovan
Sri Irawati
Syamsulrizal**



Suatu Kajian Literatur Pemodelan Matematika

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

**Aminah Ekawati
Anis Farida Jamil
Ari Srientini
Blandina Seko Bani**

**Luthfiana Tarida
Mayang Dintarini
Mohammad Auza'i Aqib**

**Nasruddin
Ovan
Sri Irawati
Syamsulrizal**

Editor: Yusuf Fuad

Cetakan Pertama: Juli 2022

Cover: Tim Penyusun

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

**Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT**

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
Dimensi : 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-448-172-3

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Buku kedua dari dua buku ini adalah sejenis kompilasi berbentuk bunga rampai (book chapters) dari project-based learning yang harus diselesaikan oleh mahasiswa S3 Pendidikan Matematika, Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (PPs Unesa), pada matakuliah Pemodelan Matematika. Buku kedua ini berisi karya tulis ilmiah dari project-based learning, yang wajib diselesaikan oleh setiap mahasiswa. Proyek-proyek tersebut dipilih oleh masing-masing mahasiswa berdasarkan tema-tema yang ditentukan oleh dosen pengampu setelah adanya kesepakatan terhadap rencana pembelajaran semester (RPS) di pertemuan awal perkuliahan secara daring (online). Tema project-based learning yang harus dipilih oleh mahasiswa secara individu meliputi: permasalahan logistik atau permasalahan mangsa-pemangsa, permasalahan pemanenan (harvesting problem), permasalahan penyakit tuberculosis (TBC), permasalahan penyakit tumor atau kanker, dan permasalahan penyakit/wabah menular. Setelah mahasiswa menetapkan tema yang dipilih, secepatnya mahasiswa harus melaporkan pilihan tema melalui alamat email yang sudah ditentukan. Kemudian mahasiswa secara individu, dengan tetap mengikuti perkuliahan online, berkewajiban untuk menyelesaikan tiga tagihan yang terdiri dari: (1) tagihan essay-assignment berupa penyelesaian tertulis permasalahan yang diberikan (case-study problem), (2) tagihan UTS berupa file power point untuk online oral-presentation dengan jadwal yang sudah diagendakan, dan (3) tagihan UAS berupa karya tulis ilmiah berdasarkan sumber referensi yang sudah ditentukan. Penyelesaian essay-assignment harus dikirim melalui alamat email yang ditentukan, sedangkan tagihan UTS dan tagihan

UAS harus dijilid dalam bentuk buku secara formal. Buku kedua ini, yang merupakan kompilasi dari hasil karya tulis ilmiah setiap mahasiswa, akan dimanfaatkan sebagai bahan ajar perkuliahan maupun sumber pustaka secara terbatas untuk program studi pendidikan matematika jenjang S1, S2, dan S3 selingkung Unesa.

Di Unesa, matakuliah Pemodelan Matematika termasuk relatif baru untuk jenjang S3 Pendidikan Matematika Unesa, meskipun untuk jenjang S1 Matematika/Pendidikan Matematika matakuliah tersebut sudah diwajibkan sejak tahun akademik 2005. Disain matakuliah ini lebih memotivasi mahasiswa untuk menjadi calon pendidik/peneliti/ praktisi matematika dengan kognitif, psikomotor dan afektif yang secara berkelanjutan dapat meningkatkan kualitas kemampuan problem-solving yang akan bermanfaat untuk menghadapi tantangan dunia kerja pada abad ke-21. Dengan demikian, matakuliah ini langsung atau tidak langsung sangat erat berkaitan dengan model pembelajaran yang berbasis Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) maupun Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics (STEAM).

Untuk memenuhi syarat minimal pada perkuliahan Pemodelan Matematika, berdasarkan RPS yang sudah disepakati, setiap mahasiswa wajib menentukan tema pilihan, memastikan minimal dua artikel utama dan tiga artikel pendukung dari Jurnal Internasional bereputasi. Berdasarkan artikel-artikel yang sudah dipilih tersebut, mahasiswa harus mempelajari, mencermati, dan melakukan analisis khususnya terkait diagram kompartemen dan model matematika yang dibahas pada masing-masing artikel, serta melakukan sintesis untuk melakukan suatu eksperimen kecil berdasarkan perubahan nilai suatu parameter yang cenderung sensitif

berpengaruh pada model matematika yang lebih disarankan berbentuk sistem persamaan diferensial. Mahasiswa diarahkan untuk mampu melakukan rekonstruksi model matematika, mevalidasi model yang digunakan, dan meresimulasi secara numerik berdasarkan hasil analisis-sintesis yang telah dilakukannya. Hal ini dimaksudkan agar mahasiswa lebih memiliki kemampuan analisis-sintesis untuk menyelesaikan disertasi dan target publikasi artikel pada Jurnal Internasional bereputasi.

Harus diakui bahwa substansi maupun esensi dari kompilasi karya tulis ilmiah dalam buku kedua ini belum optimal, khususnya kualitas hasil analisis-sintesis maupun elaborasi hasil simulasi numeriknya. Kondisi ini disebabkan mahasiswa yang sangat heterogen dan beragam kemampuannya dalam aspek reading maupun writing, dan sesuai dengan rekam jejak akademik maupun perguruan tinggi asal (homebase) dari masing-masing mahasiswa. Dari aspek matematika, setiap mahasiswa diajak berkelana dan membuka wawasan pengetahuan, yang minimal dituntut untuk memahami penerapan pembelajaran berbasis STEM, bahwa sangat beragam dan sangat luas sekali penerapan matematika dalam penyelesaian permasalahan riil dari dunia nyata. Selain itu, mahasiswa diharapkan makin menguasai beberapa aplikasi dari konsep persamaan aljabar, graf dalam diagram kompartemen, persamaan diferensial dan kalkulus, penerapan teori sistem dan kontrol optimal, computer sciences, maupun solusi numerik yang dapat menjadi jembatan alternatif ketika solusi-solusi eksak (analytic solutions) tidak cukup mudah untuk didapat.

Meskipun proses review dan editing dari setiap karya tulis ilmiah dalam buku kedua ini masih belum memenuhi kualitas kecermatan dan kesempurnaan, namun tidak lupa

apresiasi dan penghargaan yang tinggi harus diberikan kepada setiap mahasiswa yang aktif berkontribusi sampai terwujudnya buku kedua ini. Semoga buku kedua ini bisa memberikan pengalaman yang mampu membuka wawasan baru terkait some open-ended problems, problem solving strategies, mathematical modeling, STEM-based learning, as well as some applications on mathematics, bagi setiap mahasiswa yang aktif berkontribusi dalam penerbitan buku kedua ini dan akhirnya dapat mengakselerasi penyelesaian studi S3-nya. Semoga buku kedua ini bermanfaat bagi setiap mahasiswa yang aktif berkontribusi serta para pembaca semuanya.

Editor,
Yusuf Fuad

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	v
Model Penyakit Demam Berdarah Dengan Berbagai Metode Penyelesaian	1
Dinamika Model Penyebaran Tuberkulosis Yang Resisten Terhadap Obat.....	22
Analisis Kontrol Optimal Model Matematika Pada Merokok.....	38
Pemodelan Matematika Pada Penyakit Thypoid.....	53
Analisis Stabilitas Pada Model Penekanan Populasi Nyamuk.....	64
Potensi Kemoimunoterapi Pada Penyembuhan Kanker Prostat: Suatu Pemodelan Matematika	82
Lanchester Model Untuk Permasalahan <i>Multibattle</i> ..	109
Analisis Kestabilan Dan Kontrol Optimal Model Tipe $Se(Is)(Ih)Ar$ Dengan Kombinasi Vaksinasi Untuk Pandemi Covid-19	128
Pemodelan Matematika Penyakit Menular Covid- 19: Studi Kasus Di Wuhan.....	151
Model Penyebaran Dan Pengendalian Hiv/Aids.....	164
Pemodelan Penderita Diabetes Dimasa Covid-19.....	180
TENTANG PENULIS.....	197

MODEL PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGAN BERBAGAI METODE PENYELESAIAN

Aminah Ekawati

Abstrak

Tulisan ini membahas perilaku model penyakit Demam berdarah SIR-IR yang diselesaikan dengan berbagai metode yaitu metode fraksional orde pecahan Caputo, Caputo-Fabrizio(CF), dan Atangana-Baleanu-Caputo (ABC), metode Rangkuti Iterasi Variasi (RVIM), dan Modifikasi Metode Rangkuti Iterasi Variasi (IRVIM). Hasil simulasi diperoleh bahwa metode fraksional orde pecahan Caputo, CF, ABC, dan IRVIM lebih baik dalam memperlihatkan perilaku model DBD. Namun untuk IRVIM sangat tergantung dengan jumlah iterasi yang digunakan. Selanjutnya untuk menurunkan penyebaran penyakit DBD dapat dilakukan dengan mengontrol laju gigitan nyamuk dan mengurangi probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia.

Kata Kunci: Caputo, Caputo-Fabrizio(CF), dan Atangana-Baleanu-Caputo (ABC), RVIM, IRVIM

PENDAHULUAN

Salah satu penyakit yang sering dialami oleh penduduk yang berada di wilayah tropis dan subtropis adalah penyakit dengue (Chowell, et.al, 2007). Indonesia merupakan salah satu daerah yang berada di wilayah tropis, dimana penyakit dengue menjadi salah satu masalah kesehatan yang sering terjadi. Website kemenkes disebutkan bahwa penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) pertama kali ditemukan di Indonesia

pada tahun 1968 dengan jumlah kasus sebanyak 58 orang. Kasus DBD ini setiap tahun selalu ada tersebar merata pada 34 propinsi di wilayah Indonesia. Jumlah kasus DBD yang tinggi dapat menyebabkan ditetapkan daerah tersebut sebagai daerah dengan kejadian luar biasa (KLB). Misalnya pada tahun 2014, terjadi KLB di 5 provinsi dan 21 kabupaten dan tahun 2015 terjadi 7 provinsi dan 69 kabupaten salah satunya adalah Tangerang (Yuningsing, 2019). Berikut grafik sebaran DBD dari tahun 1968 sampai tahun 2022 minggu ke 18.



Gambar 1.1 Grafik perkembangan kasus DBD di Indonesia dari Tahun 1968-2022.

Kasus DBD tahun 2022 sampai minggu ke 18 secara kumulatif dilaporkan 37.548 kasus dengan jumlah kematian sebanyak 384 orang dengan Incident Rate (IR) sebesar 13,65/100.000 penduduk dan Case Fatality rate (CFR) sebesar 1,0%. Kasus DBD ini tersebar di 34 Provinsi dengan jumlah total Kab/Kota yang terkena sebanyak 445 sedangkan kematian tersebar di 131 Kab/Kota di 31 Provinsi. Sedangkan pada tahun 2020 dan 2021 IR sebesar 49/100.000. Sehingga penyakit DBD merupakan salah satu penyakit yang patut diwaspadai.

Penyakit DBD disebabkan oleh gigitan nyamuk yang telah terinfeksi virus *dengue*. Nyamuk yang menjadi vektor dalam penyakit DBD adalah nyamuk *Aedes aegypti* sebagai vektor utama dan *Aedes albopictus* sebagai vektor pendamping. Populasi nyamuk akan sangat berpengaruh

terhadap penularan penyakit DBD. Di Indonesia, pola kejadian penyakit DBD dijumpai setiap tahun pada bulan September-Februari dengan puncak pada bulan Desember atau Januari yang bertepatan dengan musim hujan (Syahribulan, Bui, & Hassan, 2012). Nyamuk akan berkembang biak dengan baik pada tempat yang menampung air yang terbuka seperti selokan, kolam renang, dan lain-lain. Di samping itu, nyamuk juga suka tinggal pada tempat yang lembab dan gelap.

Nyamuk *Aedes aegypti* memiliki waktu aktivitas menghisap darah tertinggi pada pukul 17.00-18.00 WITA sedangkan nyamuk *Aedes albopictus* memiliki waktu aktivitas tertinggi pada waktu 09.00 -WITA. Baik nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* ditemukan memiliki waktu aktivitas mengisap pada malam hari yaitu pada pukul 18.00 - 20.00 WITA.

Untuk melihat perilaku penyakit DBD dapat menggunakan pemodelan matematika. Qureshi & Atangana (2019) telah menyajikan model penyakit DBD untuk melihat dinamika wabah demam berdarah di pulau Tanjung Verde, Brazil sekitar tahun 2009 dengan bantuan tiga operator diferensial orde pecahan yaitu Caputo, Caputo-Fabrizio, dan Atangana-Baleanu-Caputo. Model yang disajikan menggunakan model SIR-IR. Sedangkan Mungkasi (2020) juga menggunakan model SIR-IR untuk menyelidiki perilaku penyakit DBD di Sulawesi Selatan, Indonesia tetapi dengan pendekatan numerik yang berbeda yaitu menggunakan metode Iterasi Variasi Rangkuti (RVIM) dan modifikasi RVIM (IRVIM).

Selanjutnya tujuan artikel ini adalah untuk membahas perilaku model penyakit demam berdarah SIR-IR yang diselesaikan dengan berbagai metode seperti metode dengan bantuan fraksional orde pecahan Caputo, Caputo-

Fabrizio(CF), dan operator Atangana–Baleanu–Caputo (ABC), metode Rangkuti Iterasi Variasi, dan Modifikasi Metode Rangkuti Iterasi Variasi dan bagaimana cara menurunkan penyebaran penyakit DBD.

TEORI-TEORI YANG RELEVAN

Fraksional order adalah hasil pengembangan dari order bilangan bulat. Order yang digunakan adalah bilangan pecahan. Misalnya pada turunan bisanya kita menuliskan $\frac{d f(x)}{dx} = D(f(x))$ artinya memiliki order 1 maka jika menggunakan fraksional order turunannya bisa ditulis $D^{\frac{1}{2}}f(x)$ yang artinya memiliki order $\frac{1}{2}$. Misalkan q adalah order dari integral dan turunan fraksional maka selang pada q adalah $0 < q < 1$.

Definisi yang digunakan terkait fraksional order sebagai berikut (Qureshi & Atangana, 2019):

1. Integral fraksional tipe Riemann-Liouville dari fungsi $f: R^+ \rightarrow R$ dengan order $\alpha > 0$ yang didefinisikan dengan

$$\int_{0,t}^{\alpha} (f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, t > 0$$

dengan $\Gamma(.)$ adalah fungsi Euler Gamma

2. Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville untuk fungsi $f(t)$ dengan order $\alpha > 0$ yang didefinisikan dengan

$$RID_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds, t > 0$$

dengan $m-1 \leq \alpha \leq m, m \in N$

3. Turunan fraksional order Caputo dengan order $\alpha > 0$ didefinisikan dengan

$$CD_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^m(s) ds, t > 0$$

dengan $m-1 \leq \alpha \leq m, m \in N$

4. Turunan fraksional order Caputo-Fabrizio dengan order $\alpha > 0$ didefinisikan dengan

$$CFD_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) \exp \exp \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-s) \right] ds, t > 0$$

dengan $M(\alpha)$ adalah fungsi normalisasi.

5. Jika $f(t) \in H^1(0, T), T > 0$ dan $\alpha \in (0, 1)$ Turunan fraksional order Atangana-Baleanu-Caputo dengan order $\alpha > 0$ didefinisikan dengan

$$ABCD_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-s)^{\alpha} \right] ds, t > 0$$

dengan $B(\alpha)$ memenuhi $B(0) = B(1) = 1$ menunjukkan fungsi normalisasi dan $E_{\alpha}(\cdot)$ adalah satu parameter dari fungsi Mittag-Leffler.

6. Fraksional α -integral yang terkait dengan Caputo-Fabrizio untuk $f(t)$ dengan order $\alpha \in]0, 1[$ yang didefinisikan dengan

$$CFJ_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{2}{M(\alpha)(2-\alpha)} \left[(1-\alpha)f(t) + \alpha \int_0^t f(s) ds \right],$$

$t > 0$

7. Fraksional α -integral yang terkait dengan Atangana-Baleanu-Caputo didefinisikan dengan

$$ABCJ_{0,t}^{\alpha}(f(t)) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s)(t-s)^{-1+\alpha} ds,$$

$t > 0$

METODE PENELITIAN

Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data pada penelitian ini menggunakan studi kepustakaan, dengan mengkaji artikel utama Qureshi & Atangana (2019).

Teknik Analisis Data

Pada penelitian ini akan dianalisis hasil pada artikel utama dengan 2 artikel yaitu artikel Mungkasi (2020) dan Fatmawati, et al (2020) dan akan dilakukan simulasi.

HASIL & PEMBAHASAN

Model penyakit DBD menggunakan model SIR-IR, yang terdiri dari 2 bagian yaitu bagian manusia dan bagian nyamuk sebagai vektor. Bagian manusia (*human*) dibagi menjadi 3 kompartemen yaitu *Susceptible*-manusia rentan terhadap DBD (S_h), *Infected*-manusia yang sudah terinfeksi DBD (I_h), dan *Recovery*-manusia yang sembuh dari DBD (R_h). Sedangkan bagian nyamuk (*mosquito*) dibagi menjadi 2 kompartemen yaitu *Susceptible*-nyamuk rentan terhadap DBD (S_m) dan *Infected*-nyamuk yang sudah terinfeksi DBD (I_m). Seekor nyamuk mendapatkan virus *dengue* pada saat mengisap darah orang yang tubuhnya terdapat virus *dengue* atau dari virus *dengue* dari nyamuk betina yang terinfeksi ke generasi berikutnya.

Adapun parameter dan variabel yang digunakan sebagai berikut:

Tabel 4.1. Parameter dan Variabel Model Penyakit DBD

Simbol	Deskripsi	Nilai
$N_h(t)$	Jumlah populasi manusia	2.500.000.000 (konstan)
$S_h(t)$	Kelompok individu yang rentan	-
$I_h(t)$	Kelompok individu yang terinfeksi	-
$R_h(t)$	Kelompok individu yang sudah sembuh	-
$N_m(t)$	Jumlah total nyamuk betina	-
$S_m(t)$	Kelompok nyamuk betina yang rentan	-
$I_m(t)$	Kelompok nyamuk betina yang terinfeksi	-

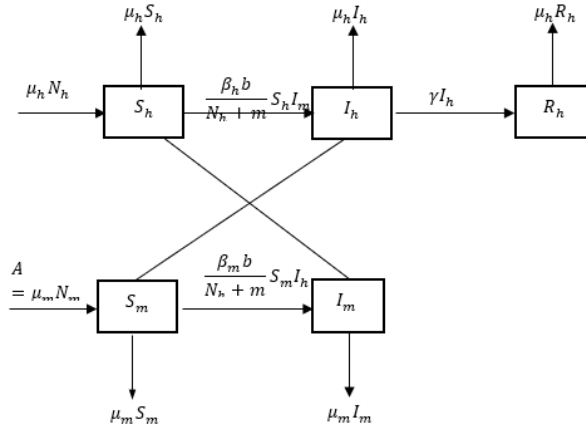
$\mu_h(t)$	Angka kematian manusia perkapita	1/25915 per hari
$\mu_m(t)$	Angka kematian nyamuk	0,1 perhari
γ	Laju kesembuhan manusia	1/3 per hari
b	Laju gigitan nyamuk	0,7 per hari
$\beta_m(t)$	probabilitas penularan infeksi dari manusia ke nyamuk	0,36
$\beta_h(t)$	Probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia	0,36
m	sumber darah alternatif yang tersedia untuk nyamuk	-
A	Laju perekrutan nyamuk	-

Asumsi yang digunakan dalam pembentukan model DBD sebagai berikut:

1. Total populasi manusia dan nyamuk dianggap konstan. Sehingga $N_h = S_h + I_h + R_h$ dan $N_m = S_m + I_m$.
2. Laju kematian dan kelahiran manusia dianggap sama.
3. Populasi manusia dan nyamuk berkurang secara alami melalui proses kematian.
4. Kelahiran pada populasi nyamuk dan manusia pada setiap kelas masuk ke dalam kelas rentan.
5. Setiap individu yang terdapat dalam populsi memiliki kemungkinan yang sama untuk tergigit nyamuk
6. Darah manusia sebagai satu-satunya sumber yang tersedia untuk nyamuk.
7. Nyamuk demam berdarah, terinfeksi virus ketika menghisap darah manusia yang terinfeksi.
8. Setelah nyamuk terinfeksi virus tidak akan pernah sembuh.
9. Laju perpindahan manusia rentan menjadi manusia terinfeksi penyakit DBD dipengaruhi karena adanya

interaksi antara nyamuk yang terinfeksi virus dengue dengan manusia yang rentan terhadap penyakit DBD. Begitupula sebaliknya laju perpindahan nyamuk rentan menjadi nyamuk terinfeksi dipengaruhi oleh adanya interaksi antara nyamuk rentan dengan manusia yang terinfeksi penyakit DBD.

Berikut diagram transfer dari penyakit DBD



Gambar 4.1. Diagram Transfer dari Penyakit DBD

Berdasarkan diagram transfer, formulasi model matematika untuk penyakit DBD sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h(N_h(t) - S_h(t)) - \frac{\beta_h b}{N_h(t) + m} S_h(t) I_m(t) \quad \dots(4.1a)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h(t) + m} S_h(t) I_m(t) - (\mu_h + \gamma) I_h(t) \quad \dots(4.1b)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h(t) - \mu_h R_h(t) \quad \dots(4.1c)$$

$$\frac{dS_m}{dt} = A - \frac{\beta_m b}{N_h(t) + m} S_m(t) I_h(t) - \mu_m S_m(t) \quad \dots(4.1d)$$

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{\beta_m b}{N_h(t) + m} S_m(t) I_h(t) - \mu_m I_m(t) \quad \dots(4.1e)$$

dengan $A = \mu_m N_m(t)$

Diberikan kondisi awal pada Sistem (4.1),

$$S_h(0) = 55784, I_h(0) = 216, R_h(0) = 0,$$

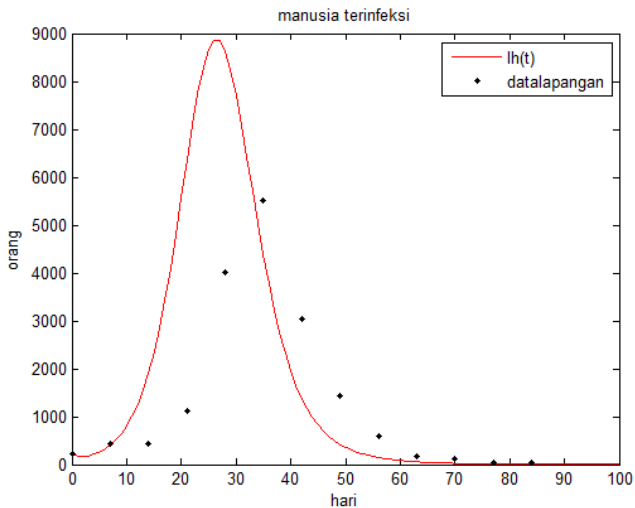
$$S_m(0) = 168000, I_m(0) = 0$$

Data lapangan terkait jumlah manusia terinfeksi demam berdarah di Tanjung Verde, Brazil pada Tahun 2019 disajikan pada Tabel berikut:

Tabel 4.2. Jumlah Manusia Terinfeksi DBD

t (hari)	Jumlah manusia	t (hari)	Jumlah manusia
0	216	49	1447
7	434	56	601
14	447	63	164
28	1129	70	109
35	4015	77	49
42	5512	84	46

Simulasi untuk model penyakit DBD Sistem (4.1) menggunakan Matlab 2013a dengan perintah ODE23s diperoleh populasi manusia terinfeksi dengan data lapangan sebagai berikut:



Gambar 4.2. Populasi manusia terinfeksi

Menggunakan definisi fraksional order Caputo diperoleh model matematika penyakit DBD sebagai berikut:

$$D_{0,1}^{\omega_h} S_h = \mu_h^{\omega_h} (N_h(t) - S_h(t)) - \frac{\beta_h b^{\omega_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) \quad \dots(4.2a)$$

$$D_{0,1}^{\omega_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\omega_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) - (\mu_h^{\omega_h} + \gamma^{\omega_h}) I_h(t) \quad \dots(4.2b)$$

$$D_{0,1}^{\omega_m} S_m = \mu_h^{\omega_m} (N_m(t) - S_m(t)) - \frac{\beta_m b^{\omega_m}}{N_h(t)} S_m(t) I_h(t) \quad \dots(4.2c)$$

Menggunakan fraksional order CF diperoleh sebagai berikut:

$$D_{0,1}^{\delta_h} S_h = \mu_h^{\delta_h} (N_h(t) - S_h(t)) - \frac{\beta_h b^{\delta_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) \quad \dots(4.3a)$$

$$D_{0,1}^{\delta_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\delta_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) - (\mu_h^{\delta_h} + \gamma^{\delta_h}) I_h(t) \quad \dots(4.3b)$$

$$D_{0,1}^{\delta_m} S_m = \mu_h^{\delta_m} (N_m(t) - S_m(t)) - \frac{\beta_m b^{\delta_m}}{N_h(t)} S_m(t) I_h(t) \quad \dots(4.3c)$$

Menggunakan fraksional order ABC diperoleh sebagai berikut:

$$D_{0,1}^{\alpha_h} S_h = \mu_h^{\alpha_h} (N_h(t) - S_h(t)) - \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) \quad \dots(4.4a)$$

$$D_{0,1}^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h(t)} S_h(t) I_m(t) - (\mu_h^{\alpha_h} + \gamma^{\alpha_h}) I_h(t) \quad \dots(4.4b)$$

$$D_{0,1}^{\alpha_m} S_m = \mu_h^{\alpha_m} (N_m(t) - S_m(t)) - \frac{\beta_m b^{\alpha_m}}{N_h(t)} S_m(t) I_h(t) \quad \dots(4.4c)$$

Persamaan 4.2a sampai Persamaan 4.4c dapat ditulis menjadi

$$D_{0,1}^{\rho} x(t) = F(x(t)), t \in [0, a], x(0) = x_0$$

dengan ρ adalah nilai dari fraksional order masing-masing dan $x = (S_h, I_h, S_m)$. Menggunakan fraksional order dari persamaan di atas maka didapatkan

$$x(t) = x_0 + \int_{0,t}^{\rho} F(x(t)), t \in [0, a]$$

$\int_{0,t}^{\rho}$ adalah operator integral Reimann-Liouville. Jika $\Delta t = 0,05 = \frac{a}{n}, n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya x_r menjadi nilai untuk mewakili hampiran $x(t)$ pada saat $t = t_r$ untuk $r = 0, 1, \dots, n$. Beda hingga untuk penyelesaian fraksional order Caputo memenuhi

$$C x_{r+1} = x_0 + \frac{(\Delta t)^{\omega}}{\Gamma(\omega + 1)} \sum_{k=0}^r [(r - k + 1)^{\omega} - (r - k)^{\omega}] F(x_k) + O(\Delta t^2)$$

Beda hingga untuk penyelesaian fraksional order Caputo-Fabrizio memenuhi

$$CF x_{r+1} = x_0 + (1 - \delta) F(x_k) + \delta \Delta t \sum_{k=0}^r F(x_k) + O(\Delta t^2)$$

Beda hingga untuk penyelesaian fraksional order memenuhi Atangana-Baleanu-Caputo

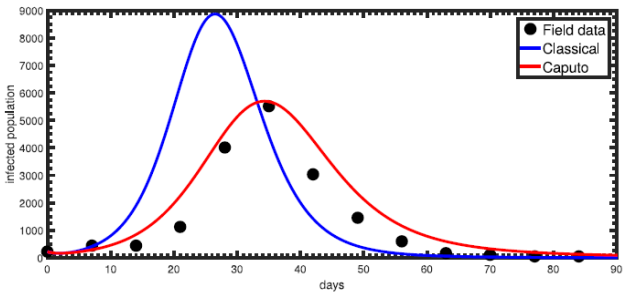
$$ABC x_{r+1} = x_0 + \frac{(1 - \alpha)}{AB(\alpha)} F(x_k) + \frac{(\Delta t)^{\alpha}}{AB(\alpha) \Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^r [(r - k + 1)^{\alpha} - (r - k)^{\alpha}] F(x_k) + O(\Delta t^2)$$

Adapun nilai order untuk masing-masing metode disajikan pada tabel berikut:

Tabel 4.3. Nilai order untuk masing-masing metode

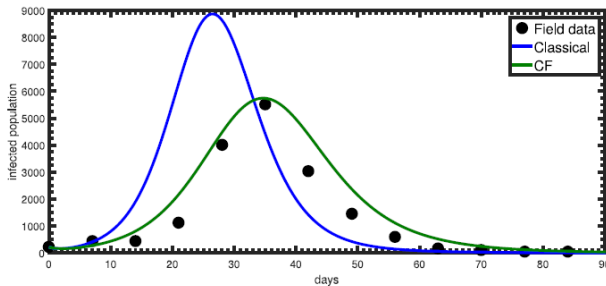
Order	Caputo	CF	ABC
ω_h	1	-	-
ω_m	0,78	-	-
δ_h	-	0,98	-
δ_m	-	0,70	-
α_h	-	-	1
α_m	-	-	0,838

Berdasarkan Qureshi & Atangana (2019) diperoleh perilaku model untuk manusia terinfeksi menggunakan metode fraksional order Caputo sebagai berikut:



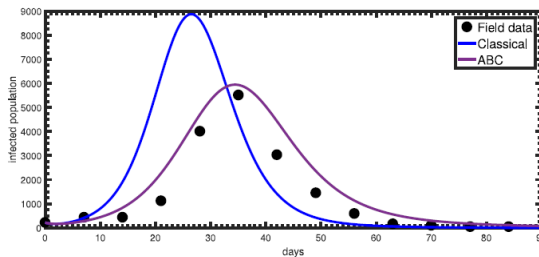
Gambar 4.3. Perilaku manusia terinfeksi model penyakit DBD metode fraksional order Caputo

Perilaku model untuk manusia terinfeksi menggunakan metode fraksional order Caputo-Fabrizio sebagai berikut:



Gambar 4.4. Perilaku manusia terinfeksi model penyakit DBD metode fraksional order Caputo-Fabrizio

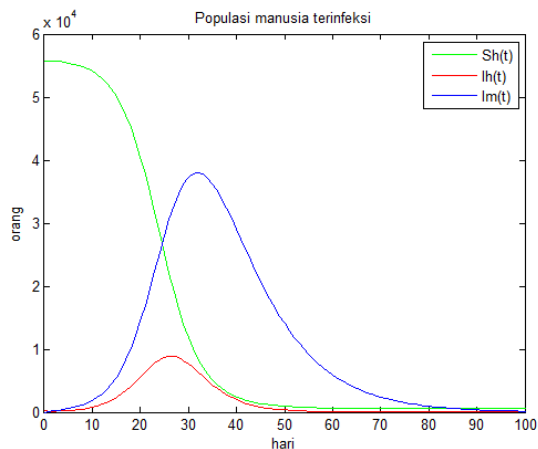
Perilaku model untuk manusia terinfeksi menggunakan metode fraksional order Atangana-Baleanu-Caputo sebagai berikut:



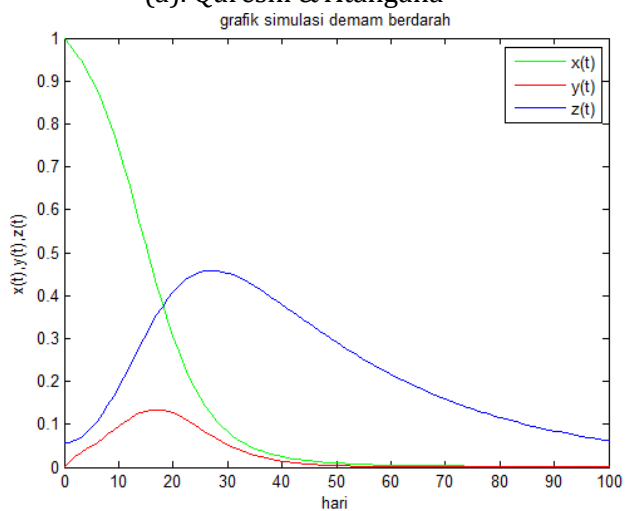
Gambar 4.5. Perilaku manusia terinfeksi model penyakit DBD metode fraksional order Atangana-Baleanu-Caputo

Dari Gambar 4.4 sampai 4.5 dapat disimpulkan bahwa untuk melihat perilaku model penyakit DBD ternyata lebih baik menggunakan metode penyelesaian menggunakan fraksional order daripada menggunakan ODE23s.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk membandingkan perilaku model penyakit DBD Qureshi & Atangana (2019) dengan Mungkasi (2020). Diperoleh hasil sebagai berikut:



(a). Qureshi & Atangana



(b) Mungkasi

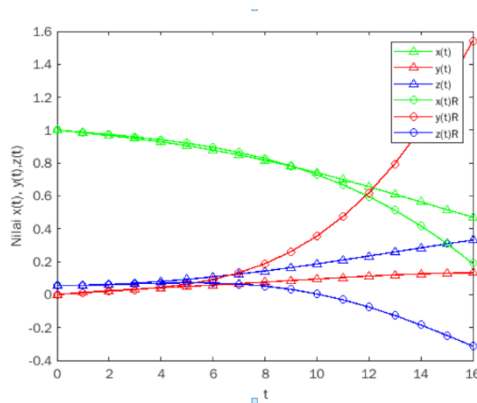
Gambar 4.6. Perilaku Model DBD Jumlah Manusia Rentan, Manusia Terinfeksi, dan Nyamuk Terinfeksi.

Jika kita perhatikan perilaku dari Gambar 4.6a dan Gambar 4.6b. adalah sama. Secara umum, jika diperhatikan maka diperoleh:

- (1). Perilaku jumlah manusia rentan turun dengan drastis dan mulai melandai setelah 40 hari.
- (2). Perilaku jumlah manusia terinfeksi akan menaik namun setelah mencapai puncak disekitar hari ke 30 sampai 40 akan turun dan mulai melandai setelah 80 hari.
- (3). Perilaku jumlah nyamuk terinfeksi akan naik namun setelah mencapai puncak disekitar 20 hari sampai 30 hari akan turun dan mulai melandai setelah 50 hari.

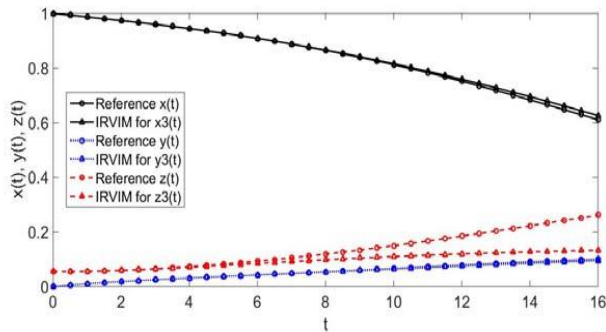
Dapat disimpulkan model SIR-IR penyakit DBD dapat memprediksi perilaku penyakit DBD baik yang ada di Tanjung Verde, Brazil dan Sulawesi Selatan, Indonesia.

Mungkasi (2020) menggunakan pendekatan numerik lainnya untuk melihat perilaku model yaitu menggunakan metode Rangkuti iterasi variasi (RVIM) dan modifikasi metode Rangkuti iterasi variasi (IRVIM). Berikut hasil simulasi RVIM sampai iterasi ke 3.

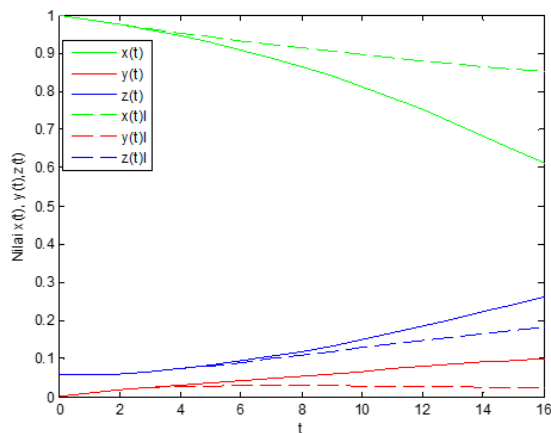


Gambar 4.7. Perilaku model RVIM

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk IRVIM dengan iterasi ke 2 dan ke 3 diperoleh hasil sebagai berikut:



(a).simulasi (iterasi 3)



(b).simulasi (iterasi 2)

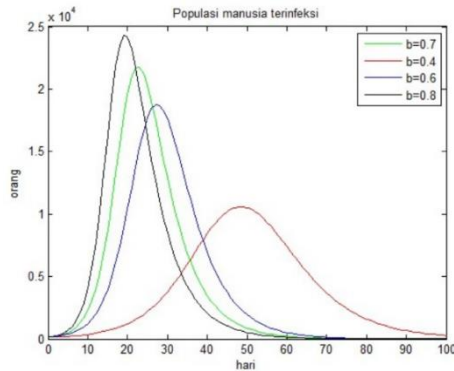
Gambar 4.8. Perilaku model IRVIM

Berdasarkan Gambar 4.8a dan 4.8b gambar yang dihasilkan tidak sama hal ini dikarenakan jumlah iterasi yang berbeda yang digunakan. Artinya jumlah iterasi yang digunakan menentukan perilaku model yang. Berdasarkan gambar 4.8 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak iterasi yang kita gunakan akan semakin mendekati data lapangan. Di

sampling itu dari Gambar 4.7 dan Gambar 4.8 diperoleh kesimpulan bahwa metode IRVIM lebih baik dalam memprediksi perilaku model.

Jika kita bandingkan antara Gambar 4.3, Gambar 4.4, Gambar 4.5, dan Gambar 4.5a maka metode fraksional order dan IRVIM lebih baik digunakan untuk melihat perilaku dari suatu model. Namun, pada metode IRVIM jumlah iterasi sangat mempengaruhi perilaku yang ditunjukkan oleh model.

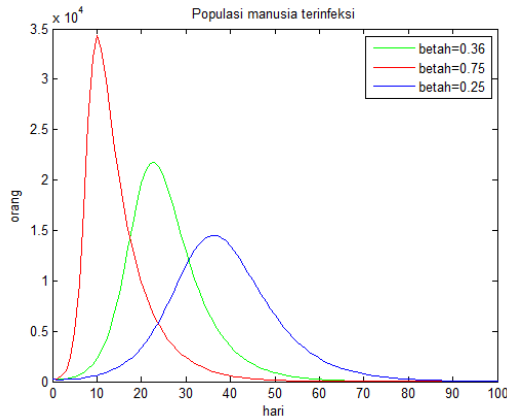
Dilakukan eksperimen kecil yang didasarkan pada nilai laju gigitan nyamuk pada Fatmawati, et.al (2020), dengan nilai $b = 0,4, 0,6, \text{ dan } 0,8$ diperoleh sebagai berikut:



Gambar 4.9. Eksperimen laju gigitan nyamuk

Hasil eksperimen ini sejalan dengan hasil yang didapatkan oleh Fatmawati, et.al (2020) bahwa untuk menurunkan tingkat penyebaran DBD disuatu masyarakat dapat dengan mengontrol laju gigitan nyamuk.

Probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia (β_h) berdasarkan Fatmawati, et.al (2020) sebesar 0,75. Dicoba juga untuk nilai $\beta_h = 0,25$ diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 4.10. Eksperimen probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia

Dari Gambar 4.10 dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia maka semakin banyak manusia yang akan terinfeksi penyakit DBD, sehingga perlu dilakukan kontrol untuk mengurangi probabilitas penularan infeksi dari nyamuk ke manusia.

Pemodelan matematika dapat menjadi alternatif pembelajaran modern dengan berpusat pada siswa (Santi, 2017). Model penyakit DBD terdiri dari persamaan diferensial nonlinear yang belum diajarkan di sekolah menengah namun guru dapat merancang model yang lebih sederhana yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial linear untuk diselesaikan siswa. Di samping itu dari model penyakit DBD dapat memberikan informasi kepada siswa terkait bagaimana penyebaran penyakit DBD sehingga siswa dapat membantu mencegah penularannya. Pada perguruan tinggi, metode fraksional order pecahan dan modifikasi Rangkuti variasi iterasi dapat diperkenalkan sebagai salah satu cara dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial.