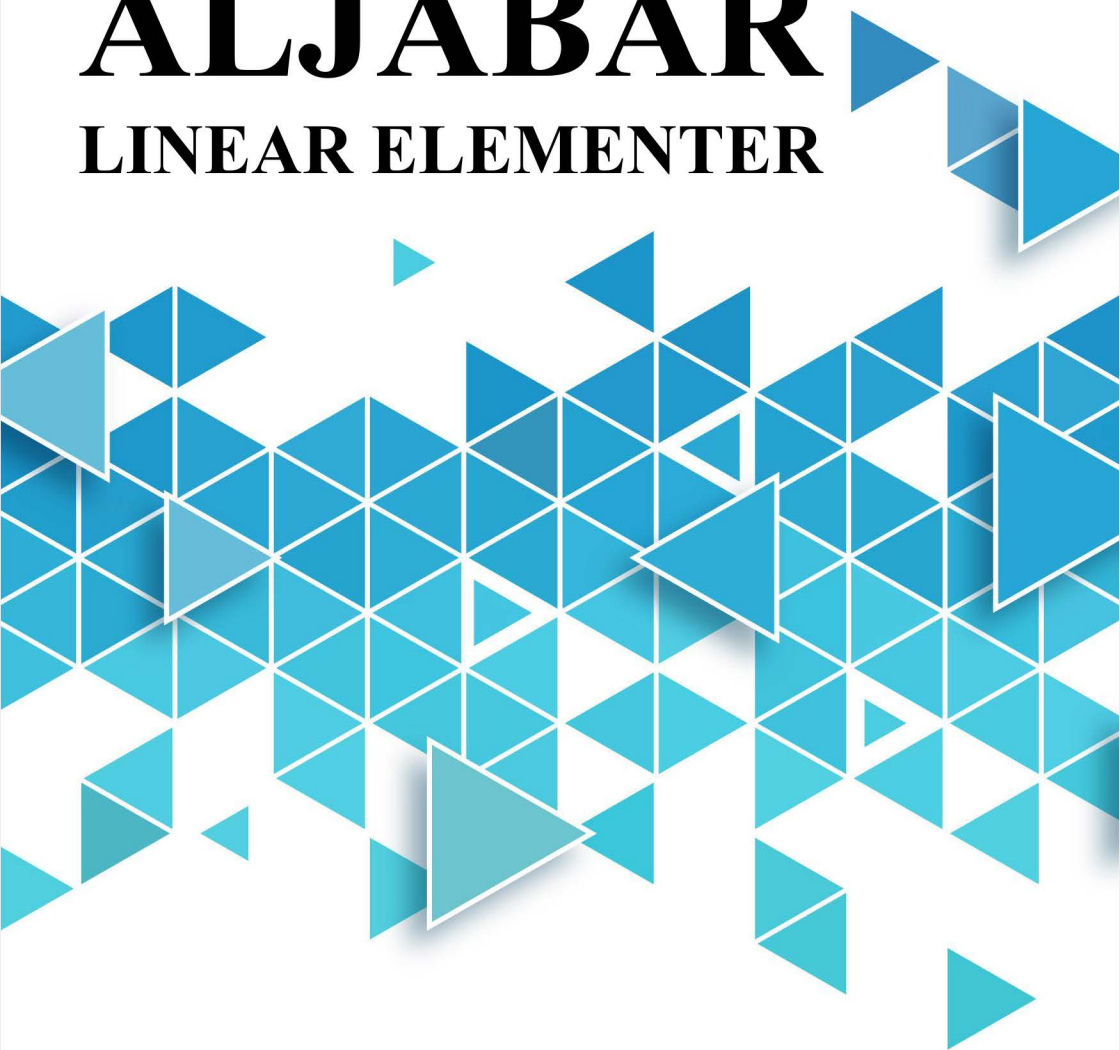


PENGANTAR ALJABAR LINEAR ELEMENTER



Nurdalilah, S.Si., M.Pd.
Adek Nilasari Harahap, S.Pd., M.P.Mat.
Susi Sulastri Lubis, S.Pd., M.P.Mat.



**PENGANTAR
ALJABAR
LINEAR ELEMENTER**

PENGANTAR ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Nurdalilah, S.Si., M.Pd
Adek Nilasari Harahap, S.Pd., M.P.Mat
Susi Sulastris Lubis, S.Pd., M.P.Mat



PENGANTAR ALJABAR LINEAR ELEMENTER

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Nurdalilah, S.Si., M.Pd
Adek Nilasari Harahap, S.Pd., M.P.Mat
Susi Sulastri Lubis, S.Pd., M.P.Mat

Editor:

Angra Meta Ruswana, S.Pd., M.Pd.

Cetakan Pertama: Agustus 2022

Cover: Rusli

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
Dimensi : 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-448-162-4

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas selesainya pembuatan buku pegangan “Pengantar Aljabar Linear Elementer”. Shalawat dan salam semoga terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Buku pegangan perkuliahan ini dibuat agar para mahasiswa bisa lebih memahami mata kuliah Analisis Real untuk mencapai hasil yang memuaskan. Selain itu, buku ini kami konsep untuk kemandirian mahasiswa dan dosen sebagai pembimbing. Kesuksesan belajar berawal dari kemauan dan ditunjang oleh berbagai sarana, salah satunya adalah buku. Harapan kami buku ini dapat membantu para mahasiswa memahami tentang mata kuliah Aljabar Linear Elementer.

Akhir kata kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menerbitkan buku ini. Kritik dan saran sangat kami harapkan untuk perbaikan buku ini di masa yang akan datang.

Padangsidempuan, 2022
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
BAB I SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS	1
A. Pengantar Sistem Persamaan Linear.....	1
B. SPL Homogen dan Non Homogen	5
C. Operasi Baris Elementer	8
D. Eliminasi Gauss.....	18
E. Matriks dan Operasi Matriks.....	26
F. Latihan Soal.....	35
 BAB II DETERMINAN	 39
A. Fungsi Determinan.....	39
B. Menghitung Determinan.....	49
C. Sifat-sifat Fungsi Determinan	57
D. Ekspansi Kofaktor; Aturan Cramer	63
E. Latihan Soal.....	77
 BAB III VEKTOR-VEKTOR DI RUANG- 2 DAN RUANG- 3	 81
A. Pengantar Vektor	81
B. Norma Vektor.....	92
C. Hasil Kali Titik.....	93
D. Hasil Kali Silang	101
E. Garis Dan Bidang Pada Ruang Berdimensi 3	105
F. Latihan Soal.....	107
 BAB IV RUANG-RUANG VEKTOR	 111
A. Ruang Berdimensi Euclidian.....	111
B. Ruang Vektor Umum	119
C. Sub Ruang	122
D. Kebebasan Linear	129

E. Latihan Soal.....	134
BAB V TRANSFORMASI LINEAR.....	137
A. Pengantar Transformasi Linear.....	137
B. Kernel dan Range (jangkauan)	145
C. Latihan Soal.....	154
BAB VI NILAI EIGEN; VEKTOR EIGEN	157
A. Nilai Eigen dan Vektor Eigen	157
B. Latihan Soal.....	164
DAFTAR PUSTAKA.....	167
SINOPSIS	169



BAB I

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS

A. Pengantar Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan berbentuk

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan semacam ini disebut dengan persamaan linear dalam variabel x dan y . Secara umum, persamaan dalam n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ didefinisikan sebagai *persamaan linear* yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Perhatikanlah bahwa dari definisi, persamaan linear tidak melibatkan sesuatu perkalian atau akar peubah. Semua peubah hanya terdapat sampai dengan angka pertama dan tidak muncul sebagai argument untuk fungsi trigonometri, fungsi logaritma, atau fungsi eksponensial.

Contoh 1

Merupakan persamaan linear :

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

Berikut ini bukanlah persamaan linear:

$$x + 3y^2 = 7 \quad 3x + 2y - z + xz = 4$$

$$y - \sin x = 0 \quad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Solusi (pemecahan)

Persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ adalah urutan n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sehingga persamaan tersebut dipenuhi, bila kita mensubstitusikannya terhadap $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan ***himpunan solusi atau pemecahannya***.

Contoh 2

Carilah himpunan pemecahan persamaan $4x - 2y = 1$ untuk mencari pemecahan-pemecahan persamaan a), maka kita dapat menetapkan sebarang bilangan untuk x dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari y , atau kita dapat memilih sebarang nilai untuk y dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari x . Jika kita ikuti pendekatan pertama dan menetapkan nilai sebarang t untuk x , maka kita dapatkan $x = t, y = 2t - \frac{1}{2}$.

Rumus-rumus ini menggambarkan himpunan pemecahan tersebut dalam sebarang parameter t . Pemecahan numeric khusus dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai spesifik untuk t . Misalnya $t = 3$ menghasilkan pemecahan $x = 3, y = \frac{11}{2}$ dan $t = -\frac{1}{2}$ menghasilkan pemecahan

$$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}.$$

Jika kita ikuti pendekatan kedua dan menetapkan sebarang nilai t untuk y , maka kita dapatkan

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad y = t$$

Walaupun rumus-rumus ini berbeda dari rumus-rumus yang kita peroleh di atas, namun rumus-rumus ini menghasilkan himpunan pemecahan yang sama jika t berubah pada semua bilangan riil yang mungkin.

Tidak semua system persamaan linear mempunyai pemecahan. Misalnya, jika kita mengalikan persamaan kedua dari sistem **1) $x + y = 4$ dan 2) $2x + 2y = 6$** dengan $\frac{1}{2}$. Maka jelaslah bahwa tidak ada pemecahan, karena kedua persamaan dalam sistem menghasilkan

$$x + y = 4$$

$$x + y = 3$$

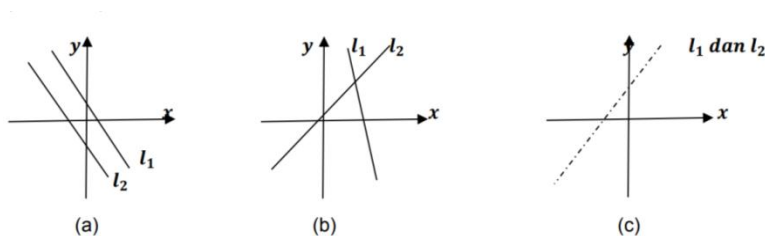
Bertentangan satu sama lain.

Sebuah persamaan yang tidak mempunyai pemecahan disebut persamaan takkonsisten (*inconsistent*). Jika ada sekurang-kurangnya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut disebut konsisten (*consistent*). Untuk menggambarkan kemungkinan-kemungkinan yang dapat terjadi dalam memecahkan sistem-sistem persamaan linear, tinjaulah sistem umum dari persamaan linear dalam bilangan-bilangan tak diketahui x dan y :

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (a_1, b_1 \text{ kedua-duanya tidak nol})$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (a_2, b_2 \text{ kedua-duanya tidak nol})$$

Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis-garis. Namakanlah garis-garis tersebut l_1 dan l_2 . Karena titik (x, y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan garis tersebut, maka pemecahan sistem persamaan tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis l_1 dan l_2 . Ada tiga kemungkinan yang terjadi (Gambar 1).



Gambar 1.1 (a) Tidak ada pemecahan. (b) Satu pemecahan. (c) Tak terhingga banyaknya pemecahan

- (a) Garis l_1 mungkin sejajar dengan garis l_2 , dalam kasus yang tidak ada perpotongannya, dan sebagai konsekuensinya maka tidak ada pemecahan untuk sistem tersebut.
- (b) Garis l_1 mungkin berpotongan dengan garis l_2 di hanya satu titik, dalam kasus ini maka sistem tersebut hanya mempunyai satu pemecahan.
- (c) Garis l_1 mungkin berimpit dengan garis l_2 , dalam kasus ini takterhingga banyaknya titik perpotongan, dan sebagai konsekuensinya maka takterhingga banyaknya pemecahan untuk sistem tersebut.

B. SPL Homogen dan Non Homogen

Sistem persamaan linear dikatakan homogen jika semua suku konstanta sama dengan nol, sehingga bentuk umum sistem persamaan linear tersebut mempunyai bentuk:

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Tiap-tiap persamaan linear homogen adalah sistem yang konsisten, karena $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, . . . , $\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut, dinamakan *pemecahan trivial (trivial solution)*, jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan *pemecahan taktrivial (nontrivial solution)*

Karena sistem persamaan linear homogen harus konsisten, maka terdapat satu pemecahan atau takterhingga banyaknya pemecahan. Karena salah satu di antara pemecahan ini adalah pemecahan trivial, maka kita dapat membuat pernyataan berikut:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai takterhingga banyaknya pemecahan taktrivial sebagai tambahan terhadap pemecahan trivial tersebut.

Terdapat data kasus yang sistem homogennya dipastikan mempunyai pemecahan taktrivial, yakni jika sistem tersebut melibatkan lebih banyak bilangan takdiketahui dari banyaknya persamaan. Untuk melihat mengapa halnya demikian, perhatikan contoh berikut dari empat persamaan dengan lima bilangan takdiketahui.

Contoh 3

Pecahkanlah sistem persamaan-persamaan linear homogen berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1,1)$$

Matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks ini menjadi bentuk eselon baris tereduksi, maka kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dengan memecahkannya untuk peubah-peubah utama maka akan menghasilkan

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Maka himpunan pemecahannya akan diberikan oleh

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Perhatikan bahwa pemecahan trivial kita dapatkan bila $s = t = 0$.

Contoh 3 melukiskan dua hal penting mengenai cara memecah kan sistem persamaan linear homogen. Yang pertama, tidak satu pun dari ketiga dasar-dasar operasi baris tersebut yang dapat mengubah kolom nol terakhir dalam matriks yang diperbesar itu, sehingga sistem persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar harus juga merupakan sistem homogen (lihat sistem 1.2 dalam Contoh 3). Yang kedua, bergantung pada apakah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar mempunyai suatu baris nol, maka banyaknya persamaan dalam sistem tereduksi sama dengan atau lebih kecil dari banyaknya persamaan dalam sistem tereduksi sama dengan atau lebih kecil dari banyaknya persamaan dalam sistem aslinya (bandingkan sistem 1.1 dan sistem 1.2 dalam Contoh 3). Jadi jika sistem homogen yang diberikan mempunyai m persamaan dengan n bilangan takdiketahui dan $m < n$, dan jika r baris tak nol dalam bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar, maka kita akan mempunyai $r < n$. Jadi sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar itu akan kelihatan seperti bentuk berikut.

$$\begin{array}{rcl}
 \cdots x_{k_1} & & + \sum() = 0 \\
 \cdots x_{k_2} & & + \sum() = 0 \\
 \cdots & \vdots & \\
 & \ddots & \\
 & & x_{k_r} + \sum() = 0
 \end{array}$$

di mana $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ adalah peubah-peubah utama dan $\sum()$ menyatakan jumlah yang melibatkan ke $n - r$ peubah yang masih sisa. Dengan memecahkannya untuk peubah utama maka akan memerlukan

$$\begin{array}{l}
 x_{k_1} = -\sum() \\
 x_{k_2} = -\sum() \\
 \vdots \\
 x_{k_r} = -\sum()
 \end{array}$$

Seperti dalam Contoh 3, kita dapat menetapkan nilai-nilai sebarang terhadap peubah utama pada ruas kanan dan dengan demikian akan mendapatkan takterhingga banyaknya pemecahan untuk sistem tersebut.

Teorema 1. Sistem persamaan linear homogeny dengan lebih banyak bilangan tak diketahui daripada banyaknya persamaan selalu mempunyai takterhingga banyaknya pemecahan.

C. Operasi Baris Elementer

Operasi baris elemnter merupakan suatu operasi yang diterapkan pada baris suatu matriks. Operasi baris elementer bisa digunakan untuk menentuka invers suatu matriks dan menyelesaikan suatu sistem persamaan linear. Pada bagian

ini kita akan mengembangkan bagan sederhana atau algoritma untuk mencari invers matriks yang dapat dibalik.

Definisi. Sebuah matriks $n \times n$ dinamakan *matriks elementer* jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ yakni I_n dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal.

Contoh 4

Di bawah ini kita daftarkan empat matriks elementer dan operasi-operasi yang menghasilaknnya.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua I_2 dengan -3

Pertukaran baris kedua dan baris keempat dari I_4

Tambahkan tiga kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama

Kalikan baris pertama dari I_3 dengan 1

Bila matriks A dikalikan di sebelah *kiri* dengan matriks elementer E maka efeknya adalah untuk memperagakan operasi baris elemeter pada A . Inilah kandungan teorema berikut.

Teorema 2. *Jika matriks elementer E dihasilkan dengan melakukan sebuah operasi baris tertentu pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan bia operasi baris yang sama dilakukan pada A*

Contoh berikut melukiskan gagasan ini.

Contoh 5

Tinjaulah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

dan tinjaulah matriks elementer

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dihasilkan oleh penambahan 3 kali baris pertama dari I_3 ke baris ketiga. Hasil kali EA adalah

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

yang persis sama seperti matriks yang dihasilkan bila kita menabahkan 3 kali baris pertama dari A ke baris ketiga.

PERYATAAN. Teorema 1 terutama sangat penting dari segi teoretis dan akan digunakan untuk mengembangkan beberapa hasil mengenai matriks dan sistem-sistem persamaan linear. Dari segi perhitungan, maka lebih disukai untuk memperagakan operasi baris secara langsung ketimbang mengalikan di sebelah kiri dengan matriks elementer.

Jika operasi baris elementer diterapkan pada matriks satuan I untuk menghasilkan matriks elementer E , maka terdapat

operasi baris kedua yang, bila diterapkan pada E , akan menghasilkan kembali I . Misalnya, jika E kita peroleh dengan mengalikan baris ke i dari I dengan konstanta c yang tak sama dengan nol, maka I dapat ditemukan kembali jika baris ke i dari E dikalikan dengan $1/c$. Berbagai kemungkinan didaftarkan dalam Gambar 1.2.

<i>Operasi baris pada I yang menghasilkan E</i>	<i>Operasi baris pada E yang menghasilkan I</i>
Kalikanlah baris i dengan $c \neq 0$.	Kalikanlah baris i dengan $1/c$.
Pertukarkan baris i dan baris j .	Pertukarkan baris i dan baris j .
Tambahkan c kali baris i ke baris j .	Tambahkan $-c$ kali baris i ke baris j .

Gambar 1.2 Operasi-operasi di ruas kanan dan kiri ini dinamakan *operasi invers* dari operasi-operasi yang bersesuaian di ruas kiri.

Contoh 6

Dengan menggunakan hasil-hasil dalam Gambar 1.2, maka ketiga matriks elementer pertama yang diberikan pada Contoh 4 dapat dikembalikan pada matriks-matriks satuan dengan menerapkan operasi-operasi baris yang berikut: kalikan baris kedua dalam (i) dengan $-1/3$; pertukarkan baris kedua dan baris keempat dalam (ii); tambahkan -3 kali baris ketiga dari (iii) ke baris pertama.

Teorema berikut memberikan sebuah sifat penting dari matriks-matriks elementer.

Teorema 3. *Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan inversnya adalah juga matriks elementer.*

Bukti. Jika E adalah matriks elementer, maka E dihasilkan dari peragaan operasi baris pada I . Misalkan E_0 adalah matriks yang dihasilkan bila invers operasi ini diterapkan pada I . Dengan menerapkan Teorema 1 dan dengan menggunakan kenyataan bahwa operasi baris invers akan saling meniadakan efek satu sama lain, maka diperoleh bahwa

$$E_0 E = I \quad \text{dan} \quad E E_0 = I$$

Jadi, matriks elementer E_0 adalah invers dari E .

Jika matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan melakukan urutan terhingga dari operasi-operasi baris elementer itu, maka jelaslah bahwa kita dapat memperoleh B kembali dari A dengan melakukan invers dari operasi baris elementer ini dalam susunan yang sebaliknya. Matriks-matriks itu dapat diperoleh yang satu dari yang lainnya dengan urutan terhingga dari operasi-operasi baris elementer yang kita sebut *ekivalen baris* (*row equivalent*).

Teorema berikutnya menghasilkan beberapa hubungan mendasar di antara matriks-matriks $n \times n$ dan sistem-sistem yang terdiri dari n persamaan linear dalam n bilangan takdiketahui. Hasil-hasil ini sangat penting dan kelak akan kerap kita gunakan dalam bagian-bagian yang lain.

Teorema 4. *Jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen, yakni, semuanya benar atau semuanya salah.*

- a) A dapat dibalik.
- b) $AX = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial.
- c) A ekivalen baris terhadap I_n .

Bukti. Kita akan membuktikan ekivalensi tersebut dengan menghasilkan utaian implikasi berikut: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Anggaplah A dapat dibalik dan misalkan X_0 adalah suatu pemecahan bagi $AX = 0$. Jadi $AX_0 = 0$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan A^{-1} maka akan memberikan $A^{-1}(AX_0) = A^{-1}0$, atau $(A^{-1}A)X_0 = 0$, atau $IX_0 = 0$, atau $X_0 = 0$. Jadi $AX = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$: Misalkan $AX = 0$ adalah bentuk matriks dari sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

dan anggaplah sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial. Jika kita memecahkannya dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, maka sistem persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar akan menjadi

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Jadi, matriks yang diperbesar tersebut yakni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

supaya (1.3) dapat diedukasi menjadi matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk (1.4) dengan urutan operasi baris elementer. Jika kita tidak memperdulikan kolom terakhir (dari bilangan nol) dengan setiap matriks ini, maka kita dapat menyimpulkan bahwa A dapat direduksi terhadap I_n dengan urutan operasi baris elementer; yakni A ekuivalen baris I_n .

(c) $\Rightarrow$ (b): Anggaplah A ekuivalen baris pada I_n sehingga A dapat direduksi pada I_n dengan urutan berhingga dari operasi-operasi baris elementer. Menurut Teorema 10 setiap operasi ini dapat dirumuskan dengan mengalikannya pada matriks elementer yang sesuai dari sebelah kiri. Jadi, kita dapat mencari matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$ sehingga

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n \quad (1.5)$$

Menurut Teorema 2, $E_1, E_2, \dots, E_k$ dapat dibalik. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1.5) dari sebelah kiri berturut-turut dengan $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ maka kita medapatkan

$$A = E_1^{-1}, E_2^{-1}, \dots, E_k^{-1} I_n = E_1^{-1}, E_2^{-1}, \dots, E_k^{-1} \quad (1.6)$$

Karena (1.6) menyatakan A sebagai hasil kali matriks-matriks yang dapat dibalik, maka kita dapat menyimpulkan bahwa A dapat dibalik.

PERNYATAAN. Karena I_n berada dalam bentuk eselon baris tereduksi dan karena bentuk eselon baris tereduksi A adalah matriks yang unik, maka bagian(c) dari Teorema 3 ekuivalen dengan pernyataan bahwa I_n adalah bentuk eselon baris tereduksi A .

Sebagai penerapan kita yang pertama dari teoram ini kita akan menghasilkan sebuah metode untuk menentukan invers matriks yang dapat dibalik.

Dengan membalikkan ruas kiri dan kanan dari (1.9) maka akan menghasilkan

$$A^{-1} = E_k \cdot \dots \cdot E_2 E_1, \text{ atau ekuivalen, yakni}$$

$$A^{-1} = E_k \cdot \dots \cdot E_2 E_1 I_n \quad (1.7)$$

yang menyatakan kepada kita bahwa A^{-1} dapat diperoleh dengan mengalikan I_n dari sebelah kiri berturut-turut dengan matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$. Karena setiap perkalian dari kiri oleh satu dari matriks-matriks elementer ini melakukan operasi baris, maka diperoleh, dengan membandingkan persamaan (1.5) dan persamaan (1.7), bahwa *urutan operasi baris tereduksi A terhadap I_n akan mereduksi I_n pada A^{-1}* . Jadi untuk mencari invers matriks A yang dapat dibalik, maka kita harus mencari urutan operasi baris elementer tereduksi A pada matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada

I_n untuk mendapatkan A^{-1} . Sebuah metode sederhana untuk melaksanakan prosedur ini diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 7

Carilah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Kita ingin mereduksi A pada matriks satuan dengan menggunakan operasi-operasi baris dan menerapkan operasi-operasi ini secara serempak pada I untuk menghasilkan A^{-1} . Hal ini dapat dirampungkan dengan menggandengkan matriks satuan tersebut ke kanan A dan dengan menerapkan operasi-operasi baris pada kedua ruas hingga ruas kiri tereduksi pada I . Maka matriks akhir akan mempunyai bentuk $[I | A^{-1}]$. Perhitungan dapat dilaksanakan sebagai berikut.

$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$	
$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$	Kita menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan -1 kali baris pertama pada baris ketiga
$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$	Kita menambahkan 2 kali baris kedua pada baris ketiga
$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$	Kita mengalikan baris ketiga dengan -1
$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$	Kita menambahkan 3 kali baris ketiga pada baris kedua dan -3 kali baris ketiga pada baris pertama
$\left[\begin{array}{ccc ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & - \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & - \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & - \end{array} \right]$	Kita menambahkan -2 kali baris kedua pada baris pertama

Jadi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sering tidak akan diketahui sebelumnya apakah sebuah matriks dapat dibalik. Jika matriks itu tidak dapat dibalik, maka, menurut bagian (c) dari Teorema 3, tidaklah mungkin ekuivalen baris pada I_n ; berarti matriks tersebut berbentuk eselon baris tereduksi yang sedikit-dikitnya mempunyai sebuah baris bilangan nol. Jadi, jika prosedur yang digunakan dalam contoh ini dicoba pada matriks yang tidak dapat dibalik, maka pada suatu tahap dalam perhitungan tersebut baris bilangan nol akan timbul pada ruas kiri. Dengan demikian, kita menyimpulkan bahwa matriks yang diberikan tidak dapat dibalik dan perhitungannya dapat dihentikan.

Contoh 8

Tinjaulah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Kita menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan menambahkan baris pertamake baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Kita menambahkan baris kedua ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Karena kita telah mendapatkan sebuah baris bilangan nol pada ruas kiri, maka A tidak dapat dibalik.

Contoh 9

Di dalam Contoh 8 kita telah memperlihatkan bahwa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah matriks yang dibalik. Dari Teorema 3, kita sekarang dapat menyimpulkan bahwa sistem persamaan-persamaan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

hanya mempunyai pemecahan trivial.

D. Eliminasi Gauss

Pada bagian ini kita memberikan prosedur yang sistematis untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linear; prosedur tersebut didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga sistem persamaan tersebut dapat kita pecahkan dengan memeriksa sistem tersebut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas adalah contoh matriks yang dinyatakan dalam *bentuk eselon baris tereduksi (reduced row-echelon form)*. Supaya berbentuk seperti ini, maka matriks tersebut harus mempunyai sifat-sifat berikut.

1. *Jika baris tidak terdiri seluruhnya terdiri dari nol, maka semua taknol pertaa dalam baris tersebut adalah 1. (Kita menamakan ini 1 utama).*
2. *Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.*
3. *Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.*
4. *Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.*

Sebuah matriks yang mempunyai sifat-sifat 1,2, dan 3, dikatakan berada dalam *bentuk eselon baris (row-echelon form)*.

Contoh 10

Matriks-matriks berikut berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks berikut berada dalam bentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PERNYATAAN. Tidak sukar untuk memantau apabila matriks dalam bentuk eselon baris harus mempunyai nol di bawah setiap 1 utama (lihat Contoh 10). Bertentangan dengan hal ini, matriks di dalam eselon baris bereduksi harus mempunyai nol di atas dan di bawah masing-masing 1 utama.

Jika karena urutan dasar-dasar operasi baris, matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan linear dibuat dalam bentuk eselon baris tereduksi, himpunan pemecahan untuk sistem tersebut dapat diperoleh dengan pemeriksaan atau paling tidak setelah sejumlah kecil langkah sederhana.

Contoh 11

Misalkan matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan linear telah direduksi oleh operasi baris menjadi bentuk eselon baris tereduksi seperti yang diberikan. Pecahkanlah sistem tersebut.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pemecahan untuk untuk (a). Sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned}x_1 &= 5 \\x_2 &= -2 \\x_3 &= 4\end{aligned}$$

Dengan pemeriksaan maka, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Pemecahan untuk untuk (b). Sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_4 &= 5 \\x_2 + 3x_4 &= -2 \\x_3 + 3x_4 &= 4\end{aligned}$$

Karena x_1 , x_2 , dan x_3 bersesuaian dengan 1 utama dalam matriks yang diperbesar, maka kita namakan peubah-peubah *utama* (*leading variabls*). Dengan memecahan peubah-peubah utama tersebut x_4 maka akan memberikan.

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 - 4x_4 \\x_2 &= 6 - 2x_4 \\x_3 &= 2 - 3x_4\end{aligned}$$

Karena x_4 dapat ditetapkan dengan sebarang nilai, katakanlah t , maka kita mempunyai tahterhingga banyaknya pemecahan. Himpunan pemecahan ini diberikan oleh rumus-rumus

$$x_1 = -1 - 4t, \quad x_2 = 6 - 2t, \quad x_3 = 2 - 3t, \quad x_4 = t$$