

KALKULUS

INTEGRAL

Drs. Agus Makmur, M.Pd.



KALKULUS INTEGRAL

KALKULUS INTEGRAL

Drs. Agus Makmur, M.Pd.



KALKULUS INTEGRAL

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Drs. Agus Makmur, M.Pd.

Editor:

I Made Suarsana, S.Pd. M.Si.

Cetakan Pertama : Juni 2021

Cover:

Rusli

Tata Letak : Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2021, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2021 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2021

Iv+110; 14,8 x 21

ISBN 978-623-6535-69-1 (PDF)



Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Isi diluar tanggung jawab Penerbit
Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kami sehingga kami berhasil menyelesaikan Buku dengan judul Kalkulus Integral sesuai yang ditargetkan. Buku ini berisikan integral tertentu, integral tak tentu dan aplikasi integral. Kami menyadari bahwa Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun selalu kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Akhir kata, kami sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan Buku ini dari awal sampai akhir. Semoga Allah SWT senantiasa meridhoi segala usaha kita. Amin.

Juni 2021, Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB I INTEGRAL TAK TENTU	1
A. Anti turunan.....	1
B. Integral Tak Tentu	2
1. Integral Tak Tentu Bentuk Aljabar	2
2. Integral Tak Tentu Bentuk Trigonometri	8
BAB II TEKNIK INTEGRAL	15
A. Teknik Substitusi.....	15
B. Teknik Substitusi Fungsi Trigonometri	20
C. Integral Parsial	30
D. Integral Fungsi Rasional.	36
E. Integral Fungsi Rasional yang Memuat Sin x dan Cos x	52
BAB III INTEGRAL TERTENTU	59
A. Pengertian Integral Tertentu	59
B. Integral Tak Wajar	74
1. Pengertian	74
2. Integral Tak Wajar dengan Integran Diskontinu.	76
C. Integral Tak Wajar dengan Batas Tak Hingga	82
1. Intergral Tak Wajar dengan Batas atas $x = \infty$	83
2. Integral Tak Wajar dengan Batas Bawah di $x = -$ ∞	84
3. Integral Tak Wajar Batas Atas $x = \infty$ dan Batas Bawah di $x = - \infty$	85
BAB IV APLIKASI PEMAKAIAAN INTEGRAL TERTENTU	87
A. Merumuskan dan Menghitung Integral Tertentu..	87

KALKULUS INTEGRAL

1. Luas daerah yang dibatasi oleh satu kurva	
Rumus 1	87
3. Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva	
Rumus 1	91
B. Merumuskan dan Menghitung Volume Benda	
Putar	95
C. Merumuskan dan Menghitung Panjang Busur ..	103
DAFTAR PUSTAKA	111

BAB I

INTEGRAL TAK TENTU

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai invers pendiferensialan, sehingga integral tak tentu didefinisikan sebagai anti diferensial. Anti diferensial adalah bentuk paling umum dari anti turunan.

A. Anti turunan

Anti turunan merupakan balikan dari turunan, sehingga untuk mempelajarinya harus dikaitkan dengan turunan fungsi.

Jika $F(x)$ adalah fungsi yang turunannya $F'(x) = f(x)$ pada interval tertentu dari sumbu x , maka $F(x)$ dinyatakan dengan anti turunan atau integral tak tentu dari $f(x)$.

Menurut definisi turunan, jika $y = x^4$ maka $\frac{d}{dx} = 4x^3$

Dengan cara yang sama, diperoleh

Jika $y = x^4 + 1$ maka $\frac{d}{dx} = 4x^3$

Jika $y = x^4 - 8$ maka $\frac{d}{dx} = 4x^3$.

Jika $y = x^4 + \sqrt{\frac{1}{7}}$ maka $\frac{d}{dx} = 4x^3$, dan seterusnya.

Dengan kata lain, untuk $y = x^4 + C$, $C \in \mathbb{R}$ maka $\frac{d}{dx} = 4x^3$.

Karena anti turunan merupakan balikan dari turunan, maka penulisan bentuk di atas dapat disederhanakan dengan $A_x = x^4 + C$. Hal ini berarti bahwa fungsi $y = x^4 + C$, dengan $C \in \mathbb{R}$ mempunyai turunan $\frac{d}{dx} = 4x^3$, atau anti turunan dari $f(x) = x^4$ adalah $F(x) = 4x^3 + C$, untuk $C \in \mathbb{R}$.

Fungsi-fungsi yang dapat ditentukan anti turunannya disebut *integrable* (terintegralkan).

B. Integral Tak Tentu

1. Integral Tak Tentu Bentuk Aljabar

Integral tak tentu adalah suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru. Fungsi ini belum memiliki nilai pasti (berupa variabel), sehingga cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tak tentu ini disebut "integral tak tentu".

Proses menentukan integral tak tentu adalah kebalikan dari proses menentukan turunan, yaitu dari $F'(x) = f(x)$ diperoleh $dF(x) = f(x) dx$ dengan f diketahui, dan F akan ditentukan. Proses ini disebut integral tak tentu, istilah tak tentu berarti memuat konstanta riil sembarang. Leibniz memperkenalkan cara penulisan simbol operasi anti diferensial dengan $\int \dots dx$.

Catatan

1. lambang $\int$ adalah lambang integral
2. lambang $\int \dots dx$ adalah operator integral
3. $f(x)$ adalah fungsi yang diintegrasikan dinamakan integran
4. istilah tak tentu berarti mengandung konstanta sembarang
5. Notasi : $\int f(x) dx = F(x) + C$ disebut integral tak tentu.

Integral tak tentu merupakan invers/kebalikan dari turunan. Turunan dari suatu fungsi, jika diintegrasikan akan menghasilkan fungsi itu sendiri. Perhatikanlah contoh turunan-turunan dalam fungsi aljabar berikut ini:

- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 8$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 17$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 - 6$ adalah $y' = 3x^2$

Berdasarkan contoh di atas, diketahui bahwa ada banyak fungsi yang memiliki hasil turunan yang sama

yaitu $y' = 3x^2$. Fungsi dari variabel x^3 ataupun fungsi dari variabel x^3 yang ditambah atau dikurang suatu bilangan (misal contoh: +8, +17, atau -6) memiliki turunan yang sama. Jika turunan tersebut diintegrasikan, seharusnya adalah menjadi fungsi-fungsi awal sebelum diturunkan. Namun, dalam kasus tidak diketahui fungsi awal dari suatu turunan, maka hasil integral dari turunan tersebut dapat ditulis:

$$f(x) = y = x^3 + C$$

Dengan nilai C bisa berapapun. Notasi C ini disebut sebagai konstanta integral. Integral tak tentu dari suatu fungsi dinotasikan sebagai: $\int f(x)dx$

Pada notasi tersebut dapat dibaca integral terhadap x ". notasi disebut integran. Secara umum integral dari fungsi $f(x)$ adalah penjumlahan $F(x)$ dengan C atau:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Keterangan

$\int f(x) =$ persamaan kurva

$F(x) =$ luasan di bawah kurva $f(x)$

C = konstanta

Karena integral dan turunan berkaitan, maka rumus integral dapat diperoleh dari rumusan penurunan. Jika turunan:

$$\frac{d}{dx} \frac{a}{(n+1)} x^{n+1} = ax^n$$

Maka rumus integral aljabar diperoleh:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{(n+1)} x^{n+1} + C$$

dengan syarat $n \neq -1$.

Sifat

Pada integral tak tentu berlaku sifat berikut

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Sebagai contoh lihatlah integral aljabar fungsi-fungsi berikut:

1. Hitung $\int 4x^3 dx$

Jawab

$$\int 4x^3 dx = \frac{3}{(3+1)} x^{3+1} + C = x^4 + C$$

2. Hitung $\int \frac{1}{x^3} dx$

Jawab

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3} dx &= \int x^{-3} dx \\ &= \frac{3}{(-3+1)} x^{-3+1} + C \end{aligned}$$

3. Hitung $\int (4x^3 - 3x^2) dx$

Jawab

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 3x^2) dx &= \frac{4}{(3+1)} x^{3+1} + \frac{3}{(2+1)} x^{2+1} + C \\ &= x^4 + x^3 + C \end{aligned}$$

Teorema 1.

Jika r sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

Akibatnya jika

$$\begin{aligned} \mathbf{r = -1 \text{ maka } } \int x^r dx &= \int x^{-1} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \end{aligned}$$

Bukti

Untuk mengembangkan suatu hasil yang berbentuk

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \text{Real.}$$

Kita cukup menunjukkan bahwa

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Dalam kasus di atas

$$D_x \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right] = \left[\frac{1}{r+1} (n+1)x^r \right] = x^r$$

Teorema 2

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi-fungsi yang integrable dan C sebarang konstanta maka:

1. $\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx,$
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
3. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$

Bukti

Untuk membuktikan teorema di atas, cukup dengan mendiferensialkan ruas kanan dan amati bahwa kita memperoleh integran dari ruas kiri.

1. $D_x \{ C \int f(x)dx \} = C D_x \{ \int f(x)dx \}$
 $= Cf(x)$
2. $D_x \{ \int f(x)dx + \int g(x)dx \} = D_x \int f(x)dx + D_x \int g(x)dx$
 $= f(x) + g(x)$
3. $D_x \{ \int f(x)dx - \int g(x)dx \} = D_x \int f(x)dx - D_x \int g(x)dx$
 $= f(x) - g(x)$

Contoh

Tentukan integral berikut berdasarkan sifat integral di atas.

1. $\int (x^2 + x)dx$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + x) dx &= \int x^2 dx + \int x dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 + C_1 + \frac{1}{2} x^2 + C_2 \\
 &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C
 \end{aligned}$$

$$2. \int \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx &= \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int \frac{x^4}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{2x^2}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int x^{7/2} dx + 2 \int x^{3/2} dx + \int x^{-1/2} dx
 \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{x(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{\sqrt[3]{x}} dx \\
 &= \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} dx + 2 \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx \\
 &= \int x^{8/3} dx + 2 \int x^{5/3} dx + \int x^{2/3} dx \\
 &= \frac{3}{11} x^{11/3} + \frac{3}{4} x^{8/3} + \frac{3}{5} x^{5/3} + C
 \end{aligned}$$

Teorema 3

Andaikan $f(x)$ fungsi yang differensiabile dan n bilangan Rasional yang bukan -1 , maka:

$$\int [f(x)]^r f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{r+1}}{r+1} + C, \quad C \in \text{Real}.$$

Contoh

1. $\int 3x\sqrt{4x^2 - 11} dx$

Jawab

Karena $D_x(4x^2 - 11) = 8x$ dx, sehingga berdasarkan teorema di atas

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{4x^2 - 11} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{4x^2 - 11} d(6x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(4x^2 - 11)^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{1}{3} (4x^2 - 11)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy$

Jawab

Karena $D_x(2y^2 + 5) = 4y$ dy, maka

$$\begin{aligned} \int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy &= \int (2y^2 + 5)^{-1/2} 3y dy \\ &= \int (2y^2 + 5)^{-1/2} \frac{3}{4} 4y dy \\ &= \frac{3}{4} \int (2y^2 + 5)^{-1/2} \cdot 4y dy \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{(2y^2 + 5)^{1/2}}{1/2} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2y^2 + 5} + C$$

Soal-soal

Tentukan integral berikut.

$$1 \quad \int (x\sqrt{2} - 3)^3 \sqrt{2} dx$$

$$2 \quad \int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 dx$$

$$3 \quad \int (5x^2 + 1) \sqrt{5x^3 + 3x - 8} dx$$

$$4 \quad \int \frac{-x^3}{(2x+5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x+5}} dx$$

$$5 \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} dx$$

$$6 \quad \int \frac{(z^2 + 1)^2}{\sqrt{z}} dz$$

$$7 \quad \int \frac{s(s+1)^2}{\sqrt[3]{s}} ds$$

2. Integral Tak Tentu Bentuk Trigonometri**Teorema 4**

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, C \in \text{Real}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, c \in \text{Real}$$

Bukti

Untuk membuktikan teorema di atas cukup dengan menunjukkan bahwa

$$D_x(-\cos x) = \sin x \text{ dan } D_x(\sin x) = \cos x.$$

Sebelum membahas teknik integral fungsi trigonometri secara lebih rinci, berikut ini diberikan integral dasar

fungsi trigonometri yang menjadi acuan untuk menentukan hasil pengintegralan dengan fungsi trigonometri.

Bentuk dasar tersebut adalah:

$$1. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$2. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$3. \int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C \\ = -\ln |\cos x| + C$$

$$4. \int \cot x \, dx = -\ln |\csc x| + C \\ = \ln |\sin x| + C$$

$$5. \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$6. \int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

Berdasarkan bentuk di atas selanjutnya diberikan beberapa kasus bentuk integral fungsi trigonometri yang dibahas pada bagian ini, diantaranya adalah Integral Fungsi Trigonometri Berpangkat.

Pada bagian ini kita akan melihat kasus – kasus integral tak tentu dari sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan, dan cosecan berpangkat.

Kasus 1, $\int \sin^n x \, dx$ atau $\int \cos^n x \, dx$, dengan n bilangan ganjil

Jika n bilangan ganjil, maka $n-1$ adalah genap.

Untuk itu kita gunakan rumus identitas $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Contoh

$$1. \text{ Carilah } \int \sin^3 x \, dx$$

Penyelesaian

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x (\sin x) \, dx \\ = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= -\cos x - \int \cos^2 x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Untuk integral ke dua pada ruas kanan, perhatikan bahwa kita dapat mengambil substitusi

$$u = \cos x, \text{ sehingga } du = -\sin x \, dx$$

maka

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin x \, dx &= -\int u^2 \, du = -\frac{1}{3} u^3 + C_2 \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C_2 \end{aligned}$$

Karena integral pertama pada ruas kanan adalah $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C_2$

maka

$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

2. Selesaikan $\int \cos^5 x \, dx$

Jawab

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^{(5-1)+1} x \, dx \\ &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \\ &= \int 1 d(\sin x) - 2 \int \sin^2 x d(\sin x) + \int \sin^4 x d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

Kasus 2, $\int \sin^n x \, dx$ atau $\int \cos^n x \, dx$, dengan n bilangan genap

Jika n bilangan genap, maka kita gunakan identitas trigonometri berikut,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \text{ dan}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

Contoh

3. Carilah $\int \sin^4 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2)^2 \, dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right\}^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 - 2\cos 2x + \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right\} \right] \, dx \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

maka

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Kasus 3, $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$, dimana salah satu m atau n ganjil

Penyelesaian kasus 3 ini sama dengan pada kasus 1

Contoh

3. Carilah $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int \sin^4 x \cos x - \sin^6 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^4 x \cos x \, dx - \int \sin^6 x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C \end{aligned}$$

maka

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

Kasus 4, $\int \sin^n x \cos^m x dx$, dengan m dan n bilangan genap

Penyelesaian kasus 3 ini sama dengan pada kasus 2

Contoh

4. Carilah $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] dx \\
 &= \int \left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2x + \cos^2 2x) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \left[(1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(\sin 4x)) (1 + \cos 2x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \left[\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 4x - \sin 4x - 2 \cos^2 2x \right) \cos 2x \right] dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \left[\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 4x - (1 \cos 4x) - \frac{1}{2} \sin 4x \cos^2 2x \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 4x - \cos 4x - \sin 2x \cos^2 2x \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \cos 4x - \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{48} \cos^3 2x + C
 \end{aligned}$$

Kasus 5, $\int \tan^n x dx$ atau $\int \cot^n x dx$ dengan n bilangan genap

Untuk menyelesaikan kasus ini, kita tulis ;

$$\begin{aligned}
 \tan^n x &= \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x & \text{atau} & & \cot^n x &= \cot^{n-2} x \cdot \cot^2 x \\
 &= \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) & & & &= \cot^{n-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1)
 \end{aligned}$$

Contoh

5. Carilah $\int \tan^3 x dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x dx &= \int \tan x \tan^2 x dx \\
 &= \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int (\tan x \sec^2 x - \tan x) dx \\
 &= \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln \sec x + C
 \end{aligned}$$

Kasus 6, $\int \sec^n x \, dx$ atau $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$ dengan n bilangan genap

Untuk menyelesaikan kasus ini, kita tulis ;

$$\begin{aligned}\sec^n x &= \sec^{n-2} x \sec^2 x \\ &= (\tan^{n-2} x + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 x\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}^n x &= \operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x \\ &= (\cot^{n-2} x + 1)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 x\end{aligned}$$

Contoh

6. Selesaikan $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx &= \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= \int (\cot^2 x + 1) \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= \int (\cot^2 x + 1) \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x + C\end{aligned}$$

Kasus 7, $\int \sec^n x \, dx$ atau $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$ dengan n bilangan ganjil positif

Untuk menyelesaikan kasus ini digunakan pengintegralan parsial.

Contoh

7. Selesaikan $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx &= \operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \int \operatorname{cosec} x \, dx \\ &= \operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \ln |\operatorname{cosec} x \cdot \cot x| + C\end{aligned}$$

Soal Latihan ;

Selesaikan Integral berikut ;

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$
2. $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$
3. $\int \sin^4 x \, dx$
4. $\int \cos^5 x \, dx$

5. $\int \sec^4 x \, dx$

6. $\int \sin 5x \cdot \sin 2x \, dx$

BAB II

TEKNIK INTEGRAL

Beberapa macam teknik pengintegralan digunakan untuk menentukan antiturunan suatu fungsi. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menentukan selesaian integral fungsi yang ditentukan.

A. Teknik Substitusi

Dalam bidang kalkulus integral substitusi atau substitusi u adalah salah satu metode untuk mencari integral dengan mensubstitusi salah satu variabel dan mengubahnya menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Istilah lain untuk teknik substitusi adalah pemisalan. Teknik substitusi pada umumnya digunakan untuk memudahkan selesaian integral ke bentuk rumus dasar rumus integral tak tentu, yaitu;

$$\text{a. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ asalkan } n \neq -1 \text{ atau}$$

$$\text{b. } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{ asalkan } n \neq -1$$

Karena rumus di atas adalah pedoman umum, maka integrannya menyesuaikan dengan rumus di atas. Jika belum sesuai atau menyimpang dari bentuk di atas maka sedapat mungkin diubah terlebih dahulu. Dengan demikian setelah integran sesuai dengan bentuk baku integralnya dapat dilakukan dengan mengaplikasikan rumus dasar integral tidak tentu.

Perhatikan beberapa contoh berikut:

$$1. \int \sqrt{1-x} dx$$

$$\text{Misal } u = \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow d(u^2) = d(1 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2u du = -dx$$

Substitusi bentuk terakhir ke $\int \sqrt{1-x} \, dx$, diperoleh

$$\int u(-2u) du = -2 \int u^2 du$$

Dengan rumus dasar di dapat

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x} \, dx &= -2 \int u^2 du \\ &= -2 \left[\frac{u^3}{3} \right] + C = -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} + C \end{aligned}$$

$$2. \int (3x+12)^{11} dx$$

$$\text{Misal } A = 3x + 12$$

$$d(A) = d(3x+12)$$

$$dA = 3 \, dx$$

$$dx = \frac{dA}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \int (3x+12)^{11} dx &= \int A^{11} \frac{dA}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int A^{11} dA \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{A^{12}}{12} \right) + C \\ &= \frac{1}{36} A^{12} + C \\ &= \frac{(3x+12)^{12}}{36} + C \end{aligned}$$

$$3. \int \cos^2 2x \, dx$$

Misal $A = 2x$

$$d(A) = d(2x)$$

$$dA = 2 \, dx$$

$$dx = \frac{dA}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 2x \, dx &= \int \cos^2 A \frac{dA}{2} \\ &= \int \cos^2 A \frac{1}{2} dA \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^2 A dA \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 2A}{2} dA \\ &= \frac{1}{4} \int dA + \frac{1}{4} \int \cos 2A dA \\ &= \frac{A}{4} + \frac{\sin 2A}{8} + C \\ &= \frac{2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C \end{aligned}$$

$$4. \int \sqrt{4x^2 + 4x} \, (4x+2) \, dx$$

Jawab

Misal $A = \sqrt{4x^2 + 4x}$

$$A^2 = 4x^2 + 4x$$

$$2A \, dA = (8x+4) \, dx$$

$$2A \, dA = 2(4x+2) \, dx$$

$$A \, dA = (4x+2) \, dx$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x^2 + 4x} \, (4x+2) \, dx &= \int A \cdot A \, dA \\ &= \int A^2 \, dA \\ &= \frac{1}{3} A^3 + C \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{4x^2 + 4x} + C \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{t \, dt}{\sqrt{3t+4}}$$

Jawab

$$\text{Misal } P = \sqrt{3t+4}$$

$$P^2 = 3t + 4 \Leftrightarrow t = \frac{P^2 - 4}{3}$$

$$d(P^2) = d(3t+4)$$

$$2P \, dp = 3 \, dt \Leftrightarrow dt = \frac{2}{3} P \, dp, \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t \, dt}{\sqrt{3t+4}} &= \int \frac{\left(\frac{P^2-4}{3}\right) \left(\frac{2}{3} P\right) dp}{P} \\ &= \frac{1}{9} \int (2P^2 - 8) dp \end{aligned}$$

$$6. \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Jawab

$$\text{Misal } u = \sqrt{16-x^2}$$

KALKULUS INTEGRAL

$$u^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 - u^2$$

$$d(u^2) = d(16 - x^2)$$

$$2u du = (-2x) dx \Leftrightarrow dx = -\frac{u}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} &= \int \frac{(16 - u^2) \left(-\frac{u}{x} \right)}{u} du \\ &= - \int \frac{16 - u^2}{x} du \\ &= -\frac{1}{x} \int (16 - u^2) du \\ &= -\frac{16u}{x} + C_1 + \frac{u^3}{3x} + C_2 \\ &= -16 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + (16 - x^2) \frac{\sqrt{16 - x^2}}{3x} + C \\ &= -\frac{16(16 - x^2)^{1/2}}{x} + \frac{(16 - x^2)^{3/2}}{3x} + C \end{aligned}$$

Soal-soal

Tentukan hasil pengintegralan di bawah ini:

$$1. \int t(t+2)^{3/2} dt$$

$$2. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$3. \int \frac{3dt}{\sqrt{2t+1}}$$

$$4. \int \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 2x} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

$$7. \int x(3x+2)^{3/2} dx$$

$$8. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx$$

$$9. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{3} dx$$

$$5. \int \frac{(6t-1)\sin \sqrt{3t^2-t-1}}{\sqrt{3t^2-t-1}} dt \quad 10. \int \cot^n x dx$$

B. Teknik Substitusi Fungsi Trigonometri

Teknik substitusi fungsi trigonometri digunakan untuk menyelesaikan integral jika integrannya memuat bentuk-bentuk:

a. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, $a \in \text{Real}$

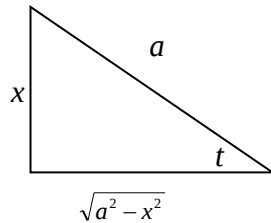
b. $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$, $a \in \text{Real}$

c. $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$, $a \in \text{Real}$

atau bentuk lain yang dapat diubah menjadi bentuk di atas, misalnya

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - x^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + x^2}$$



$$\sqrt{a^2 x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ atau } \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ yang dapat}$$

diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna.

Integrannya memuat $\sqrt{a^2 - x^2}$ atau sejenisnya,

Gunakan substitusi

$$x = a \sin t \text{ atau } \sin t = \frac{x}{a}$$

$$x = a \sin t \Leftrightarrow dx = a \cos t dt$$

$$\text{dengan } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ sehingga,}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} \\
 &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\
 &= a \cos t
 \end{aligned}$$

Catatan

Gambar segitiga siku-siku di atas yang masing-masing sisinya diketahui berguna untuk menentukan nilai fungsi trigonometri yang lain, yaitu $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$, dan $\csc t$. Hal ini dikarenakan sangat mungkin hasil dari pengintegralan adalah fungsi-fungsi tersebut.

Contoh:

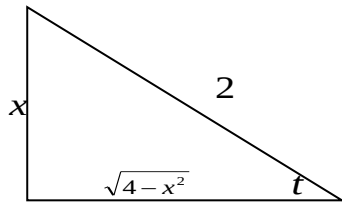
Tentukan hasil pengintegralan berikut ini:

$$1. \int \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

Jawab

Substitusi $x = 2 \sin t$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \sin t &= \frac{x}{2} \\
 dx &= 2 \cos t \, dt
 \end{aligned}$$



$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 \cos t$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4 - x^2} \, dx &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t \, dt \\
 &= 4 \int \cos^2 t \, dt \\
 &= 4 \int \cos^2 t \, dt = 4 \int \frac{(1 + \cos 2t)}{2} \, dt \\
 &= 2 \int dt + 2 \int \cos 2t \, dt \\
 &= 2t + \sin 2t + C \\
 &= 2t + 2 \sin t \cos t
 \end{aligned}$$