

GOMETRI

Transformasi



Dr. H. Supratman, M.Pd.

Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.

GEOMETRI TRANSFORMASI

Dr. H. Supratman, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.



GEOMETRI TRANSFORMASI

Penulis:

Dr. H. Supratman, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.

Editor:

Erik Santoso

Layouter :

Tim Kreatif PRCI

Cover:

Rusli

Cetakan Pertama : Januari 2025

Hak Cipta 2025, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2025 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2025
; 18 x 25cm
ISBN

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga buku ini dapat diselesaikan. Buku ini berjudul *Geometri Transformasi*, merupakan sebuah usaha untuk menyajikan materi geometri transformasi secara terstruktur dan komprehensif. Buku ini dirancang untuk membantu pembaca memahami dan menerapkan prinsip-prinsip geometri transformasi dengan jelas dan sistematis.

Penulis menyadari bahwa penyusunan buku ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan saran, masukan, dan dukungan selama proses penyusunan buku ini. Penulis juga berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi para pembaca, baik dalam konteks akademis maupun praktis.

Akhir kata, penulis berharap buku ini dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam pemahaman dan penguasaan geometri Transformasi. Semoga buku ini dapat membantu para pembaca dalam mengeksplorasi keindahan dan kekayaan geometri transformasi, serta memfasilitasi penerapan konsep-konsep matematika dalam berbagai bidang.

Tasikmalaya, Januari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
BAB I RELASI, FUNGSI DAN TRANSFORMASI	1
A. RELASI	1
B. FUNGSI.....	8
C. TRANSFORMASI	13
D. Jenis-jenis Geometri.....	19
BAB II ISOMETRI DAN PENCERMINAN	23
A. ISOMETRI.....	23
B. PENCERMINAN	30
BAB III SETENGAH PUTARAN DAN RUAS GARIS BERARAH	39
A. Pengertian Setengah Putaran	39
B. Setengah Putaran sebagai Suatu Isometri.....	40
C. Sifat-Sifat Setengah Putaran	40
D. Penamaan Setengah Putaran	41
E. Ruas Garis Berarah.....	47
F. Sifat-Sifat Ruas Garis Berarah.....	47
G. Kelipatan Ruas Garis Berarah.....	49
BAB IV TRANSLASI.....	50
A. Pengertian Translasi.....	50
B. Translasi sebagai suatu Isometri	52
C. Persamaan Translasi	55
D. Ketertutupan Translasi	56
E. Sifat - sifat Lain Translasi.....	58
BAB V REFLEKSI GESER DAN GRUP ISOMETRI	60
A. REFLEKSI GESER.....	60
B. GRUP ISOMETRI	65

BAB VII TEOREMA DASAR ISOMETRI.....	94
A. TEOREMA TEOREMA DALAM ISOMETRI	94
B. TEOREMA KETUNGGALAN ISOMETRI.....	98
C. PARITY.....	101
BAB VIII SIMILARITAS	105
A. PENGERTIAN SIMILARITAS	105
B. DILATASI	109
BAB IX GRUP SIMETRI DAN GRUP DIHEDRAL.....	119
A. GRUP SIMETRI.....	119
B. GRUP HERDINAL.....	119
MODUL 1 FUNGSI	133
A. Capaian Pembelajaran:.....	133
B. Petunjuk:	133
C. Uraian Materi	134
D. Latihan.....	138
MODUL 2 TRANSFORMASI	140
A. Capaian Pembelajaran:.....	140
B. Petunjuk:	140
C. Ringkasan Materi	140
D. Latihan.....	149
MODUL 3 ISOMETRI (S).....	151
A. Capaian Pembelajaran:.....	151
B. Petunjuk:	151
C. Ringkasan Materi	152
D. Latihan.....	157
MODUL 4 TRANSLASI (GESERAN).....	159
A. Capaian Pembelajaran:.....	159
B. Petunjuk:	159
C. Ringkasan Materi	159
D. Latihan.....	165

MODUL 5 SETENGAH PUTARAN (H)	166
A. Capaian Pembelajaran:.....	166
B. Petunjuk:	166
C. Uraian Materi	166
MODUL 6 PENCERMINAN (M)	173
A. Capaian Pembelajaran:.....	173
B. Petunjuk:	173
C. Uraian Materi	173
D. Latihan.....	183
MODUL 7 ROTASI PUTARAN (R)	185
A. Capaian Pembelajaran:.....	185
B. Petunjuk:	185
C. Uraian Materi	185
D. Latihan.....	189
MODUL 8 PENCERIMAN GESER (G).....	191
A. Capaian Pembelajaran:.....	191
B. Petunjuk:	191
C. Uraian Materi	191
D. Latihan.....	194
DAFTAR PUSTAKA	195
BIODATA PENULIS.....	196

BAB I

RELASI, FUNGSI DAN TRANSFORMASI

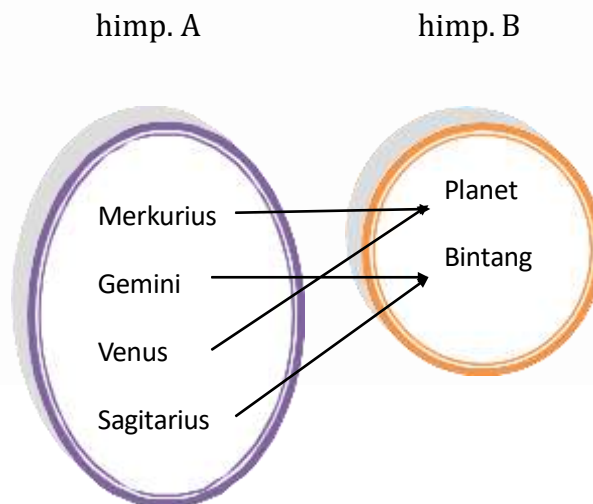
A. RELASI

1. Pengertian Relasi

Secara umum, relasi merupakan hubungan antara dua elemen himpunan. Hubungan ini bersifat abstrak, dan tidak perlu memiliki arti apapun baik secara konkrit maupun secara matematis. Dalam matematika relasi didefinisikan sebagai berikut:

“Keterikatan yang menghubungkan himpunan yang satu dengan himpunan yang lain, atau aturan yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B, maka kita menyebut R suatu relasi dari A ke B dan menyatakannya dengan: $R = \{A, B, P(x, y)\}$ ”

Contoh suatu relasi :



Keterangan :

Misalnya, diketahui nama benda-benda angkasa yang terdiri dari Merkurius, Gemini, Venus, dan Sagitarius dalam himpunan A, sedangkan dalam himpunan B adalah kelompok dari benda-benda angkasa yaitu planet dan bintang. Maka relasinya adalah, kedua himpunan A dan himpunan B dihubungkan berdasarkan pengelompokan masing-masing, yaitu Merkurius, Venus adalah kelompok nama planet dan Gemini, Sagitarius adalah kelompok nama bintang.

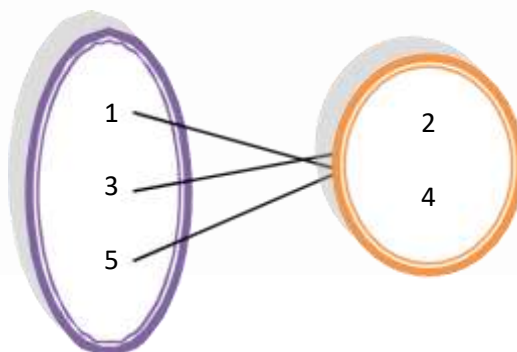
Berdasarkan contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa suatu relasi harus memenuhi syarat sebagai berikut :

1. Sebuah himpunan A
2. Sebuah himpuana B
3. Sebuah kalimat terbuka $P(x, y)$ dimana $P(a, b)$ bisa benar atau salah untuk setiap pasangan terurut (a, b) dimana, $(a, b) \in A \times B$

2. Cara Menyatakan Relasi

Ada 2 cara menyatakan relasi, yaitu:

1. Dengan diagram panah



Dengan diagram pasangan berurutan. $R = \{(1,4), (3,2), (5,2)\}$ Dengan menggunakan penyajian relasi di atas,

maka relasi R dari himpunan A ke himpunan B dapat kita definisikan sebagai himpunan pasangan (a, b) pada:

$A \times B$, di mana $a \in A$ dan $b \in B$.

2. Grafik Cartesius

Diagram cartesius merupakan diagram yang digambarkan dengan sebuah grafik dengan meletakkan himpunan A disebelah sumbu datar dan meletakkan himpunan B di sumbu vertikal. Sedangkan relasi ditunjukkan dengan titik. Contoh :

Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Jika $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Diagram cartesius yang menyatakan lebih dari himpunan A ke himpunan B .

2 lebih dari 1

3 lebih dari 1 dan 2

4 lebih dari 1, 2, dan 3

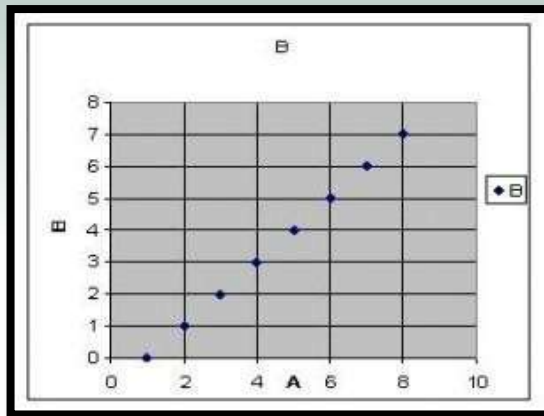
5 lebih dari 1, 2, 3, dan 4

6 lebih dari 1, 2, 3, 4, dan 5

7 lebih dari 1, 2, 3, 4, 5 dan 6

8 lebih dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7

Maka diagram cartesiusnya adalah



3. Jenis-jenis Relasi

Jenis-jenis Relasi ada 6, yaitu :

- Relasi Invers
- Relasi Refleksif
- Relasi Simetrik
- Relasi anti Simetrik
- Relasi Transitif
- Relasi Ekuivalen

Pengertian

- Relasi Invers

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B . Invers dari R yang dinyatakan dengan R^{-1} adalah relasi dari B ke A yang mengandung semua pasangan terurut yang bila dipertukarkan masih termasuk dalam R . Ditulis dalam notasi himpunan sebagai berikut :

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

Contoh Relasi Invers

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka $R = \{(1, a), (1,$

$b), (2, a), (2, b)\}$ merupakan suatu relasi dari A ke B .

Tentukan relasi invers dari R , Relasi invers dari R adalah ;

$$R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)\}$$

b. Relasi Refleksif

Misalkan $R = (A, A, P(x, y))$ suatu relasi. R disebut relasi refleksif, jika setiap $a \in A$ berlaku $(a, a) \in R$. Dengan kata lain, R disebut relasi refleksif jika setiap anggota dalam A berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh Relasi Refleksif

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $R =$

$$\{(1,1), (2,3), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$

Apakah R relasi refleksif? R bukan relasi refleksif, sebab $(2,2)$ tidak termasuk dalam R . Jika $(2,2)$ termasuk dalam R , yaitu $R_1 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,2), (4,4)\}$ maka R merupakan relasi refleksif.

c. Relasi Simetrik

Misalkan $R = (A, B, P(x, y))$ suatu relasi. R disebut relasi simetrik, jika setiap $(a, b) \in R$ berlaku $(b, a) \in R$. Dengan kata lain, R disebut relasi simetrik jika $a R b$ berakibat $b R a$.

Contoh Relasi Simetrik

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $R = \{(1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (4,2)\}$

Apakah R relasi simetrik?

R bukan merupakan relasi simetrik, sebab $(2,3) \in R$ tetapi $(3,2) \notin R$. Jika $(3,2)$ termasuk dalam R , maka $R_1 = \{(1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,2)\}$ merupakan relasi

simetrik.

Catatan penting : R disebut relasi simetrik jika dan hanya jika

$$R = R^{-1}$$

d. Relasi Anti Simetrik

Suatu relasi R disebut relasi anti simetrik jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$. Dengan kata lain, Jika $a, b \in A$, $a \neq b$, maka $(a, b) \in R$ atau $(b, a) \in R$, tetapi tidak keduanya.

Contoh Relasi Anti Simetrik:

Misalkan R suatu relasi dalam himpunan bilangan asli yang didefinisikan " y habis dibagi oleh x ", maka R termasuk relasi anti simetrik karena jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b , maka $a = b$. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $R1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$, maka $R1$ bukan relasi anti simetrik, sebab $(2,3) \in R1$ dan

$(3,2) \in R1$ pula.

e. Relasi Transitif

Misalkan R suatu relasi dalam himpunan A . R disebut relasi transitif jika berlaku; Jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$. Dengan kata lain Misalkan R suatu relasi dalam himpunan A . R disebut relasi transitif jika berlaku: Jika a dan b , maka a dan c . Dengan kata lain, jika suatu elemen berelasi dengan elemen b , dan berelasi dengan elemen c , maka elemen a juga harus berelasi dengan elemen c agar relasi tersebut memenuhi sifat transitif. Relasi transitif ini penting karena mencerminkan hubungan yang "menerus" di antara elemen-elemen dalam

himpunan. Misalnya, dalam konteks pembagian bilangan, jika a membagi b dan b membagi c , maka pasti a membagi c , sehingga hubungan ini bersifat transitif.

Contoh lain:

Misalkan $<$ dan $\leq$ didefinisikan sebagai ("kurang dari atau sama dengan"). Karena $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$, sehingga relasi ini bersifat transitif. Sebaliknya, jika suatu relasi tidak memenuhi kondisi di atas, maka relasi tersebut tidak bersifat transitif. Contohnya adalah relasi "berteman dengan," karena jika a berteman dengan b dan b berteman dengan c , tidak selalu berarti a berteman dengan c .

f. Relasi Ekuivalen

Suatu relasi R dalam relasi ekuivalen harus memenuhi beberapa sifat yaitu:

- 1) Sifat Reflektif
- 2) Sifat Simetrik
- 3) Sifat Transitif

Contoh Relasi Equivalen

Misalkan R suatu relasi dalam segitiga yang didefinisikan " x sama dan sebangun dengan y ", maka R termasuk relasi ekuivalen sebab ;

- 4) Untuk setiap a pada himpunan tersebut, segitiga a sama dan sebangun dengan segitiga a sendiri.
- 5) Jika a sama dan sebangun dengan b , maka b sama dan sebangun dengan a .
- 6) Jika a sama dan sebangun dengan b dan b sama dan sebangun dengan c , maka a sama dan sebangun dengan c .

sebangun dengan c , maka a sama dan sebangun dengan c .

4. Domain dan Range suatu Relasi

A. Domain

Misalkan R suatu relasi dari A ke B dengan $R \subset A \times B$.

Domain/ daerah asal/ daerah definisi/ ranah dari relasi R adalah sebuah himpunan D yang anggotanya merupakan anggota pertama dalam pasangan terurut R , yaitu; $D = \{a : a \in A, (a, b) \in R\}$

B. Range

Range/ daerah hasil/ daerah nilai/ jangkauan adalah semua anggota himpunan bagian dari B yang merupakan anggota kedua dari pasangan terurut R , yaitu ; $E = \{b : b \in B, (a, b) \in R\}$

Contoh Domain dan Range

Misalkan R relasi dalam bilangan asli A yang dinyatakan dalam kalimat terbuka " $2x + y = 10$ " atau dapat ditulis ; $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A, 2x + y = 10\}$, maka Himpunan jawab dari R adalah $R = \{(1,8),(2,6),(3,4), (4,2)\}$ Domain dari R adalah $D = \{1,2,3,4\}$ Range dari R adalah $E = \{8,6,4,2\}$ Invers dari R adalah $R^{-1} = \{(8,1),(6,2),(4,3),(2,4)\}$.

B. FUNGSI

1. Pengertian Fungsi

Fungsi, dalam istilah matematika adalah pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain). Istilah ini berbeda pengertiannya dengan kata yang sama yang

dipakai sehari-hari, seperti “alatnya berfungsi dengan baik.” Konsep fungsi adalah salah satu konsep dasar dari matematika dan setiap ilmu kuantitatif. Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Contoh sebuah fungsi dengan domain dan kodomain himpunan bilangan riil adalah $y = f(2x)$, yang menghubungkan suatu bilangan riil dengan bilangan riil lain yang dua kali lebih besar. Dalam hal ini kita dapat menulis $f(5) = 10$. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$f: A \rightarrow B$$

Dengan demikian, dalam mendefinisikan fungsi f yang memetakan setiap elemen himpunan A kepada B . Notasi ini hanya mengatakan bahwa ada sebuah fungsi f yang memetakan dua himpunan, A kepada B .

$$f: x \rightarrow x^2$$

Atau

$$f: x = x^2$$

2. Fungsi sebagai suatu Relasi

Sebuah fungsi dapat dikatakan sebagai suatu relasi antara dua himpunan, dengan syarat bahwa setiap unsur dalam himpunan pertama (disebut domain) hanya berpasangan dengan satu unsur dalam himpunan kedua (disebut kodomain). Dengan kata lain, fungsi adalah relasi khusus di mana tidak ada

dua pasangan dalam fungsi tersebut yang memiliki elemen pertama yang sama. Secara formal, fungsi dari himpunan ke adalah relasi yang memenuhi sifat berikut:

1. Untuk setiap , terdapat tepat satu sedemikian sehingga .

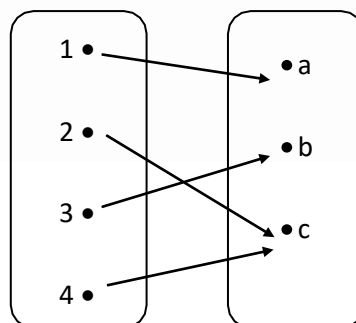
Fungsi sering dilambangkan sebagai , dengan , yang menunjukkan bahwa dihubungkan ke oleh fungsi. Contoh: Misalkan dan . Sebuah fungsi dapat didefinisikan sebagai . Fungsi ini valid karena setiap elemen dalam memiliki tepat satu pasangan dalam . Sebaliknya, jika , maka ini bukan fungsi karena elemen dalam dipasangkan dengan lebih dari satu elemen dalam. Fungsi memiliki berbagai jenis, seperti fungsi satu-satu (injektif), fungsi pada (surjektif), dan fungsi satu-satu dan pada (bijektif), yang masing-masing memiliki sifat khusus dalam relasi antara domain dan kodomain.

3. Sifat-sifat Fungsi

1) Fungsi Surjektif

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B atau $Rf = B$.

Contoh :



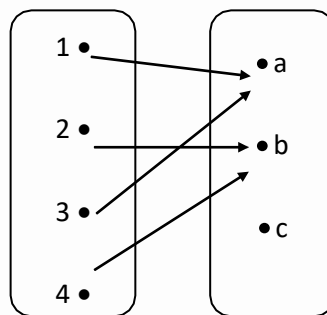
$$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ A : \{1,2,3,4\} & & B : \{a,b,c\} \end{array}$$

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dalam pasangan terurut :
 $f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)\}$. Tampak bahwa daerah hasil
 fungsi f adalah Rf :

$\{a, b, c\}$ dan $Rf = B$ maka fungsi f adalah fungsi surjektif
 atau fungsi ^[2] onto atau fungsi kepada.

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika
 dan hanya jika daerah hasil fungsi f ^[2] merupakan himpunan
 bagian murni dari himpunan B atau $Rf \subset B$.

Contoh :

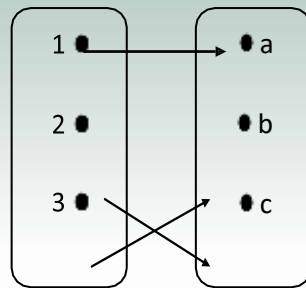


$$\text{[2]} \quad A : \{1,2,3,4\}, B : \{a,b,c\}$$

fs $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dalam pasangan terurut $f : \{(1, a),$
 $(2, b), (3, a), (4, b)\}$. Tampak bahwa daerah hasil fs $f : Rf :$
 $\{a, b\}$ dan $Rf \subset B$, maka fungsi f adalah fungsi into atau
 fungsi ke dalam.

2) Fungsi Injektif

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (fungsi satu-
 satu) jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$
 berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$. Contoh:



Fungsi f

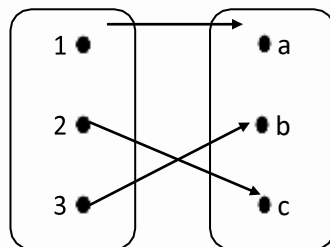
$$A : \{1,2,3\} , B : \{a,b,c\}$$

$f: A \rightarrow B$ dinyatakan dalam pasangan terurut $f : \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

Tampak bahwa tiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di B . Fungsi f adalah fungsi injektif atau satu-satu.

3) Fungsi Bijektif

Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif. Contoh :



A

B

Fungsi f

$$A : \{1,2,3\} , B : \{a,b,c\}$$

fungsi $f: A \rightarrow B$, dinyatakan dalam pasangan terurut $f : \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$. Tampak bahwa fungsi f adalah fungsi

surjektif sekaligus fungsi injektif. fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

C. TRANSFORMASI

1. Pengertian Transformasi

Dalam kamus bahasa Indonesia, Transformasi adalah perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dsb). Transformasi dalam matematika didefinisikan sebagai berikut :

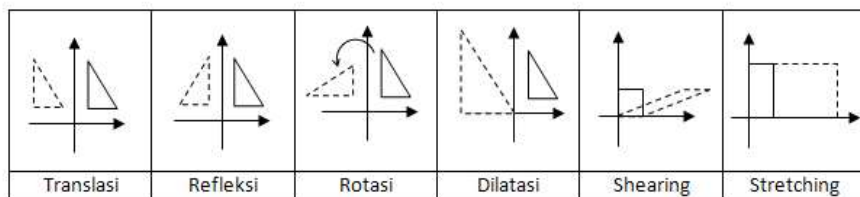
"Transformasi T dibidang adalah suatu pemetaan titik pada suatu bidang ke himpunan titik pada bidang yang sama".

2. Sifat-sifat Transformasi

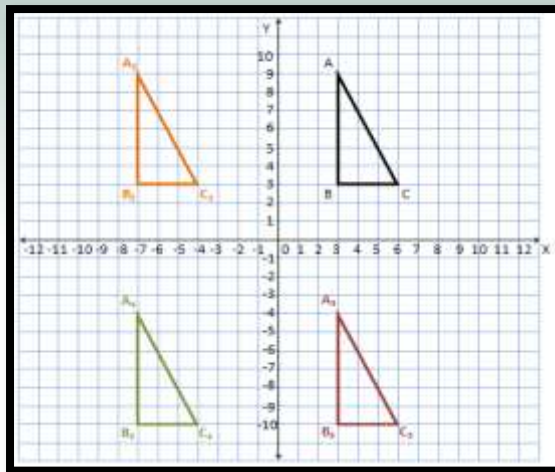
Transformasi merupakan suatu pemetaan titik pada suatu bidang ke himpunan titik pada bidang yang sama. Sifat-sifat dari transformasi antara lain :

- 1) Translasi (Pergeseran)
- 2) Refleksi (Pencerminan)
- 3) Rotasi (Perputaran)
- 4) Dilatasi (Penskalaan)

Berikut ini ilustrasinya :



1) TRANSLASI / PERGESERAN



Berdasarkan gambar diatas, segitiga ABC yang mempunyai koordinat $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, $C(6, 3)$ ditranslasikan:

$\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ menjadi segitiga $A_2B_2C_2$ dengan

$A_2(-7, 9)$, $B_2(-7, 3)$, $C_2(-4, 3)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \end{pmatrix}$ menjadi segitiga $A_3B_3C_3$ dengan

$A_3(3, -4)$, $B_3(3, -10)$, $C_3(6, -10)$

$\begin{pmatrix} -10 \\ -13 \end{pmatrix}$ menjadi segitiga $A_4B_4C_4$ dengan

$A_4(-7, -4)$, $B_4(-7, -10)$, $C_4(-4, -10)$

Berdasarkan penjelasan diatas, maka untuk mencari nilai translasi dapat digunakan rumus sebagai berikut :

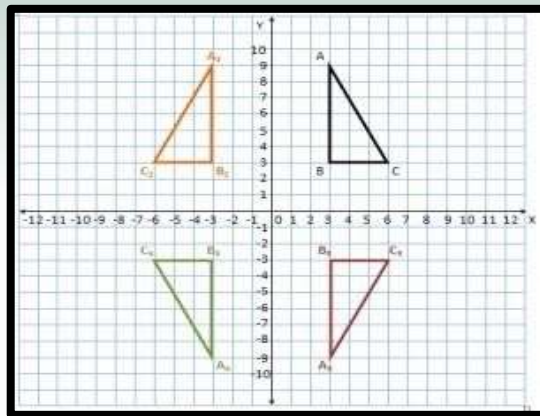
$$P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x + a, y + b)$$

Dimana :

a menyatakan pergeseran horizontal (kekanan+, kekiri-)

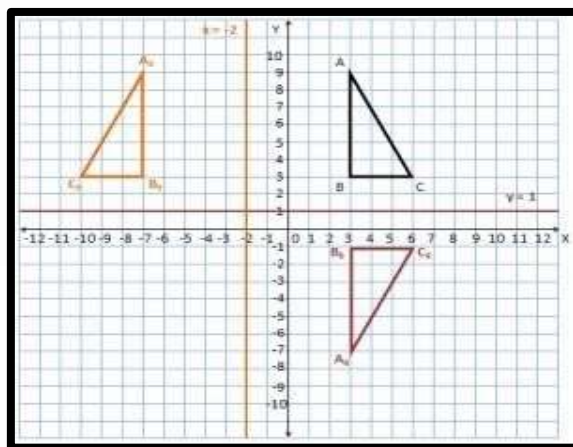
b menyatakan pergeseran vertikal (keatas+, kebawah-)

2) REFLEKSI / PENCERMINAN



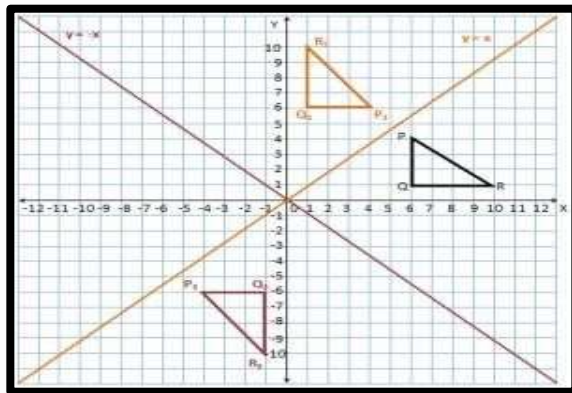
Segitiga ABC dengan koordinat $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, $C(6, 3)$ dicerminkan:

- 1) Terhadap sumbu Y menjadi segitiga A_2, B_2, C_2 dengan koordinat $A_2(-3, 9)$, $B_2(-3, 3)$, $C_2(-6, 3)$
- 2) terhadap sumbu X menjadi segitiga A_3, B_3, C_3 dengan koordinat $A_3(3, -9)$, $B_3(3, -3)$, $C_3(6, -3)$.
- 3) terhadap titik $(0, 0)$ menjadi segitiga A_4, B_4, C_4 dengan koordinat $A_4(-3, -9)$, $B_4(-3, -3)$, $C_4(-6, -3)$.



Segitiga ABC dengan koordinat $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, $C(6, 3)$ dicerminkan:

- 1) Terhadap garis $x = -2$ menjadi segitiga A_5 , B_5 , C_5 dengan koordinat $A_5(-7, 9)$, $B_5(-7, 3)$, $C_5(-10, 3)$.
- 2) Terhadap sumbu $y = 1$ menjadi segitiga A_6 , B_6 , C_6 dengan koordinat $A_6(3, -7)$, $B_6(3, -1)$, $C_6(6, -1)$.



Segitiga PQR dengan koordinat $P(6, 4)$, $Q(6, 1)$, $R(10, 1)$

1) dicerminkan:

- 1) terhadap garis $y = x$ menjadi segitiga P_2 , Q_2 , R_2 dengan koordinat $P_2(4, 6)$, $Q_2(1, 6)$, $R_2(1, 10)$.
- 2) terhadap garis $y = -x$ menjadi segitiga P_3 , Q_3 , R_3 dengan koordinat $P_3(-4, -6)$, $Q_3(-1, -6)$, $R_3(-1, -10)$

Berdasarkan penjelasan diatas dapat dirumuskan:

Pencerminan terhadap garis $x = a$ atau $y = b$

$$P(x, y) \rightarrow P'(2a - x, y)$$

$$P(x, y) \rightarrow P'(x, 2b - y)$$

Pencerminan terhadap sumbu x atau sumbu y

$$P(x, y) \rightarrow P'(x, -y) \rightarrow \text{Matriks Transformasi: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P(x, y) \rightarrow P'(-x, y) \rightarrow \text{Matriks Transformasi: } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pencerminan terhadap titik (0, 0)

$$P(x, y) \rightarrow P'(-x, -y) \rightarrow \text{Matriks Transformasi: } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pencerminan terhadap garis $y = x$ atau $y = -x$

$$P(x, y) \rightarrow P'(y, x) \rightarrow \text{Matriks Transformasi: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

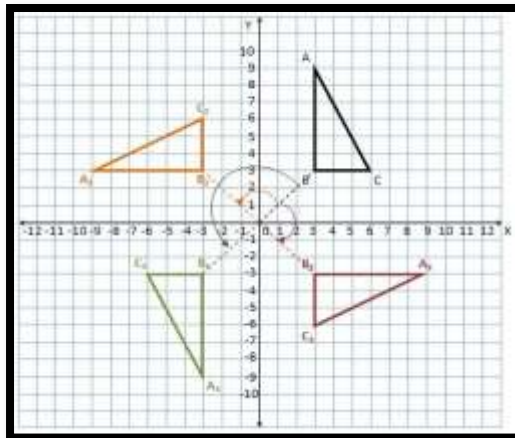
$$P(x, y) \rightarrow P'(-y, -x) \rightarrow \text{Matriks Transformasi: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pencerminan terhadap garis $y = mx + c$ Jika $m = \tan \theta$ maka:

$$\sin 2\theta = \frac{2m}{1+m^2} \text{ dan } \cos 2\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - c \\ y - c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

3) ROTASI / PERPUTARAN



Untuk rotasi searah jarum jam, sudut diberi tanda negatif (-)

Untuk rotasi berlawanan arah jarum jam, sudut diberi tanda positif (+) Segitiga ABC dengan koordinat $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, $C(6, 3)$ dirotasi:

- 1) $+90^\circ$ atau -270° dengan pusat rotasi $O(0,0)$ menjadi segitiga A_2, B_2, C_2 dengan koordinat $A_2(-9, 3)$, $B_2(-3, 3)$, $C_2(-3, 6)$
- 2) $+270^\circ$ atau -90° dengan pusat rotasi $O(0,0)$ menjadi segitiga A_3, B_3, C_3 dengan koordinat $A_3(9, -3)$, $B_3(3, -3)$, $C_3(3, -6)$
- 3) $+180^\circ$ atau -180° dengan pusat rotasi $O(0,0)$ menjadi segitiga A_4, B_4, C_4 dengan koordinat $A_4(-3, -9)$, $B_4(-3, -3)$, $C_4(-6, -3)$

Berdasarkan penjelasan diatas, maka rotasi dapat dirumuskan sebagai berikut:

Rotasi sejauh θ dengan pusat (a,b)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

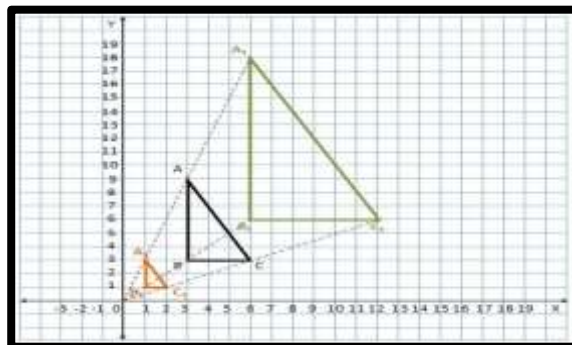
Rumus praktis untuk rotasi dengan pusat rotasi $O(0, 0)$:

$$P(x, y) \xrightarrow{R(0^\circ, 90^\circ)} P'(-y, x)$$

$$P(x, y) \xrightarrow{R(0^\circ, -90^\circ)} P'(y, -x)$$

$$P(x, y) \xrightarrow{R(0^\circ, 180^\circ)} P'(-y, -x)$$

4) DILATASI / PENSKALAAN



Segitiga ABC dengan koordinat $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, $C(6, 3)$ didilatasi:

- 1) Dengan faktor skala $k = \frac{1}{3}$ dan pusat dilatasi $O(0,0)$ menjadi segitiga $A_2B_2C_2$ dengan koordinat $A_2(1, 3)$, $B_2(1, 1)$, $C_2(2, 1)$.
- 2) Dengan faktor skala $k = 2$ dan pusat dilatasi $O(0,0)$ menjadi segitiga A_3, B_3, C_3 dengan koordinat $A_3(6, 18)$, $B_3(6, 6)$, $C_3(12, 6)$

Untuk nilai k negatif, arah bayangan berlawanan dengan arah aslinya. Berdasarkan penjelasan diatas, maka dapat dirumuskan :

Dilatasi dengan pusat (a, b) dan faktor skala k

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Rumus praktis dilatasi dengan faktor skala k dan pusat dilatasi $O(0, 0)$:

$$P(x, y) \xrightarrow{R(0, K)} P' (Kx, Ky)$$

D. Jenis-jenis Geometri

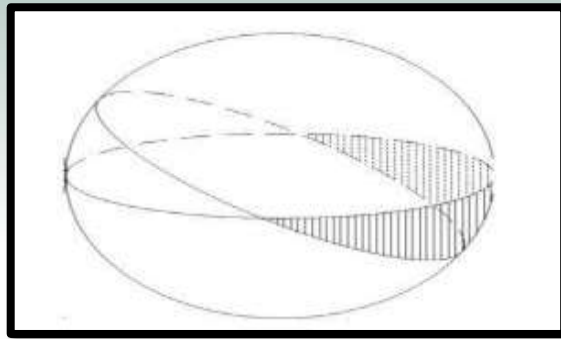
1. Geometri Euclid

Geometri Euclid adalah Geometri bidang datar, yang menjelaskan sifat-sifat titik dan garis pada bidang datar. Euclid menyadari bahwa titik dan garis yang digambarkan di selembar kertas mempunyai sifat-sifat yang konsisten. Dari sinilah dia menuliskan 5 aksioma bagi Geometrinya yang dikenal dengan sebutan Lima Postulat.

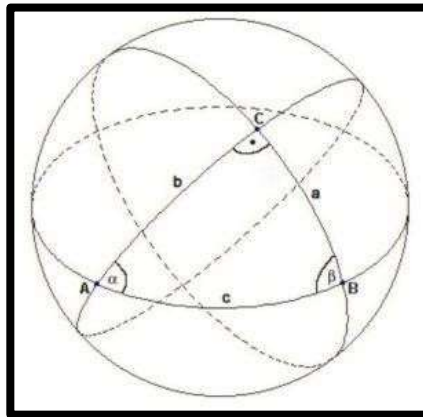
1. Suatu potongan garis lurus dapat digambar dengan cara menghubungkan dua titik yang berbeda
2. Suatu potongan garis dapat diperpanjang menjadi tak hingga panjangnya.
3. Suatu Potongan Garis bisa menjadi jari-jari bagi suatu lingkaran dengan salah satu ujung garis menjadi titik pusat bagi lingkaran tersebut.
4. Semua sudut siku-siku itu sama
5. Jika 2 buah garis memotong memotong garis ketiga membentuk dua sudut dalam yang jumlah sudutnya kurang dari jumlah 2 sudut siku-siku maka kedua garis tersebut akan berpotongan satu sama lain.

2. Geometri Eliptik

Geometri Eliptik sering disebut Geometri spherical, diambil dari kata sphere yang artinya permukaan bola. Geometri ini membahas sifat-sifat titik dan garis pada permukaan bola. Garis pada Geometri ini adalah Lingkaran besar (*Great Circle*) yaitu lingkaran terbesar yang bisa di gambar pada permukaan bola. Itu artinya lingkaran besar mempunyai keliling dan jari-jari yang dengan permukaan bolanya, serta mempunyai titik pusat yang sama. Silahkan kalian gambar 2 lingkaran besar pada permukaan bola pasti kedua lingkaran tersebut berpotongan.

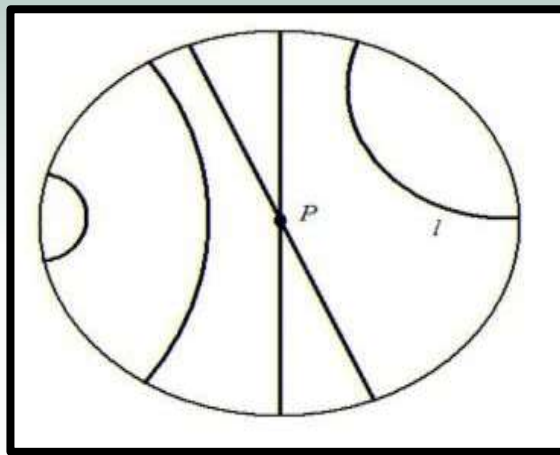


Dalam geometri elliptik, garis bisa memutar diri sendiri terus menerus tak berhingga kali. Sedangkan pengertian titik pada Geometri Elliptik sama dengan Geometri Euclidean. Jika pada Geometri Euclidean jumlah sudut segitiga selalu 180° maka dalam Geometri Elliptik jumlah sudut segitiga selalu lebih besar dari 180° (tetapi selalu kurang dari 900°).



3. Geometri Hiperbola

Pada Geometri Hiperbola, bidangnya adalah Cakram Poincare. Titik berada didalam cakram sedangkan garis adalah tali busur melingkar yang tegak lurus dengan batas cakram.



Secara umum garis pada Geometri Hiperbola mempunyai panjang tak hingga.

Geometri	Jumlah Sudut Segitiga	Banyaknya Garis Sejajar Pada Aksioma Fairplay
Euclidean	180°	1
Eliptik	$> 180^\circ$	0
Hiperbola	$< 180^\circ$	∞

BAB II

ISOMETRI DAN PENCERMINAN

A. ISOMETRI

1. Pengertian Isometri

Arti kata isometri adalah ukuran tetap. Pengertian isometri berikut akan dipelajari melalui definisi dan contoh-contoh berikut ini.

Definisi 2.1

Misalkan T suatu transformasi, transformasi T ini disebut isometri jika dan hanya jika untuk setiap pasangan titik P dan Q anggotanya dari bidang Euclides V berlaku bahwa $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ dimana $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.

Contoh soal 2.1

Misalkan diketahui garis g pada bidang V . Anda pandang transformasi T yang ditetapkan sebagai berikut:

- a) Jika $P \in g$ maka $T(P) = P$
- b) Jika $P \notin g$ maka $T(P) = P'$ sehingga g sumbu dari $\overline{PP'}$.

Apakah transformasi T ini suatu isometri atau bukan?

Penyelesaian:

Sesuai dengan definisi 2.1, Anda harus mengambil dua titik sebarang P dan Q anggota dari V . Selanjutnya, anda misalkan $T(P) = P'$ dan $T(Q) = Q'$. Dari pemisalan $T(P) = P'$ dan $T(Q) = Q'$, anda memperoleh dua hal, yaitu:

1. g sumbu dari $\overline{PP'}$, apabila anda misalkan $g \cap \overline{PP'} = \{N\}$ maka $\overline{PN} = \overline{NP'}$.