

Buku Ajar

MATEMATIKA DISKRIT

St. Nur Humairah Halim, S.Pd., M.Pd.



Buku Ajar

MATEMATIKA DISKRIT

Buku Ajar Matematika Diskrit

St. Nur Humairah Halim, S.Pd., M.Pd.



Buku Ajar Matematika Diskrit

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

St. Nur Humairah Halim, S.Si., M.Si.

Editor:

Ilham Syata, S.Si., M.Si.

Cetakan Pertama: Mei 2022

Cover: Rusli

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022

Dimensi : 14,8 x 21 cm

ISBN: 978-623-448-095-5

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Penulis mengucapkan puji syukur kepada *Allah Subhanahu Wa Ta'ala* yang telah memberikan begitunikmat, kesempatan, dan kesehatan sehingga buku “Matematika Diskrit” dapat diselesaikan. Shalawat dan salam kita kirimkan kepada Nabi Muhammada *Shallallahu 'Alaihi Wasallam*, Nabi terakhir yang diutus ke muka bumi ini sebagai suri tauladan dan pembawa risalah rahmatan lil ‘alamin.

Buku ini ditulis untuk digunakan sebagai panduan untuk melaksanakan kuliah Matematika Diskrit sehingga dapat membantu mahasiswa memahami konsep dan terapan dari mata kuliah Matematika Diskrit. Selain itu, penulis berharap buku ini dapat digunakan oleh berbagai pihak dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak atas dorongan, bantuan, dan motivasi sehingga buku ini dapat diselesaikan. Namun, tidak dapat dipungkiri bahwa isi buku ini memiliki banyak kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca demi perbaikan dari buku ini.

Makassar, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB I INDUKSI MATEMATIKA.....	1
A. Gambaran Umum.....	1
B. Tujuan Pembelajaran	1
C. Prinsip Induksi Matematika	1
D. Prinsip Induksi Matematika Kuat.....	4
F. Latihan	7
BAB II KOMBINATORIKA	10
A. Gambaran Umum.....	10
B. Tujuan Pembelajaran	10
C. Dua Prinsip Dasar Perhitungan.....	10
D. Permutasi.....	13
E. Kombinasi	15
F. Permutasi dan Kombinasi Multihimpunan	17
G. Koefisien Binomial	22
H. Latihan	38
BAB III FUNGSI PEMBANGKIT	42
A. Gambaran umum.....	42
B. Tujuan pembelajaran.....	42
C. Fungsi Pembangkit Biasa	42
D. Koefisien Fungsi Pembangkit	49

E. Fungsi Pembangkit Eksponen	54
F. Latihan	59
BAB IV RELASI REKURSIF	63
A. Gambaran umum	63
B. Tujuan pembelajaran	63
C. Pengantar	63
D. Relasi Rekursif Linear Dengan Koefisien Konstan.....	65
E. Relasi Rekursif Homogen Dengan Koefisien Konstan.....	68
F. Relasi Rekursif Tak Homogen Dengan Koefisien Konstan	77
G. Solusi Relasi Rekursif Dengan Fungsi Pembangkit.....	84
H. Latihan	89
BAB V PRINSIP SARANG MERPATI.....	92
A. Gambaran Umum.....	92
B. Tujuan Pembelajaran	92
C. Prinsip Pigeonhole.....	92
D. Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama.....	93
E. Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua	95
F. Prinsip Pigeonhole Bentuk Ketiga	97
G. Penerapan Prinsip Pigeonhole	98
H. Latihan	115
BAB VI PENGANTAR GRAF	117
A. Gambaran Umum.....	117
B. Tujuan Pembelajaran	117

C. Pengenalan Graf	117
D. Representasi Graf	130
E. Latihan	155
DAFTAR PUSTAKA.....	165
BIOGRAFI PENULIS.....	167

BAB I

INDUKSI MATEMATIKA

A. Gambaran Umum

Pada BAB ini kita akan mempelajari tentang prinsip induksi matematika dan prinsip induksi matematika kuat.

B. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran pada BAB ini yaitu

1. Mampu memahami prinsip induksi matematika
2. Mampu memahami prinsip induksi matematika kuat

C. Prinsip Induksi Matematika

Sebuah cara pembuktian yang sering dipakai, simpel dan sangat ampuh di dalam matematika kombinatorial dan ilmu komputer, dikenal dengan **prinsip induksi matematika**. Untuk suatu pernyataan tertentu yang melibatkan sebuah bilangan asli n , jika kita dapat menunjukkan bahwa:

- (1) Pernyataan itu benar untuk $n = n_0$ dan
- (2) Pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n = k$, ($k \geq n_0$),

maka kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq n_0$. Langkah (1) biasanya dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah (2) dinamakan **langkah induksi**. Di samping itu, asumsi bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k$ di dalam (2) biasanya dinamakan **hipotesis induksi**.

Kita perhatikan bahwa prinsip induksi matematika merupakan akibat langsung dari definisi bilangan asli. Perhatikan suatu himpunan S yang mempunyai sifat

- (1) Bilangan asli n_0 ada di dalam S.
- (2) Jika bilangan asli k ada di dalam S, maka bilangan asli $k + 1$ juga ada di dalam S, ($k > n_0$).

Berdasarkan definisi himpunan bilangan asli, kita dapat menyimpulkan bahwa S mengandung semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan n_0 . Akan tetapi, sesungguhnya inilah yang dinyatakan oleh prinsip induksi matematika ketika kita mengambil S sebagai himpunan bilangan asli yang membuat pernyataan yang diberikan tadi benar.

Contoh 1.1

Buktikan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

untuk semua $n \geq 1$.

Penyelesaian:

- (1) *Basis induksi.* Untuk $n = 1$, kita peroleh $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

adalah suatu pernyataan yang benar.

- (2) *Langkah induksi.* Misalkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

adalah benar.

Sekarang kita peroleh

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} (k+1)^2 \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1) + 1][2(k+1) + 1]}{6}
\end{aligned}$$

Bacalah dari pernyataan pertama hingga pernyataan terakhir, rangkaian kesamaan ini merupakan pernyataan untuk $n = k + 1$. Jadi kebenaran pernyataan untuk $n = k$ secara tidak langsung menyatakan kebenaran pernyataan untuk $n = k + 1$. Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif n .

Contoh 1.2

Buktikan bahwa

$$2n > n + 20$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

Penyelesain:

(1) *Basis induksi.* Untuk $n = 5$, kita peroleh $2^5 > 5 + 20$
adalah suatu pernyataan yang benar.

(2) *Langkah induksi.* Misalkan bahwa

$$2^k > k + 20$$

adalah benar.

Sekarang kita peroleh

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k + 20) = 2k + 40 > (k + 1) + 20.$$

Maka disimpulkan bahwa $2^n > n + 20$ adalah benar untuk $n \geq 5$.

D. Prinsip Induksi Matematika Kuat

Bentuk prinsip induksi matematika yang lebih kuat, yang sering disebut sebagai **prinsip induksi matematika kuat**, dapat dinyatakan sebagai berikut. Untuk suatu pernyataan tertentu yang melibatkan bilangan asli n , jika kita dapat menunjukkan bahwa:

- (1') pernyataan itu benar untuk $n = n_0$ dan
- (2') pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n_0 \leq n \leq k$,

maka kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq n_0$.

Bentuk ini lebih kuat dari prinsip induksi matematika yang disajikan di atas. Tegasnya, di dalam langkah induksi, untuk membuktikan bahwa pernyataan yang bersangkutan benar untuk $n = k + 1$, kita

dibolehkan membuat asumsi yang lebih kuat di dalam (2') daripada di dalam (2) di atas. Dengan kata lain, prinsip induksi matematika kuat memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan asumsi yang lebih banyak.

Contoh 1.3

Kita akan memperlihatkan bahwa setiap bilangan bulat positif n yang lebih besar atau sama dengan 2 merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima.

Penyelesaian :

- (1') *Basis induksi.* Untuk $n = 2$, karena 2 adalah bilangan prima, pernyataan tersebut benar.
- (2') *Langkah induksi.* Misalkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk sembarang bilangan bulat n , $2 \leq n \leq k$. Untuk bilangan bulat $k + 1$, jika $k + 1$ bilangan prima, maka pernyataan itu benar. Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka $k + 1$ dapat dituliskan sebagai pq , dengan $p \leq k$ dan $q \leq k$. Menurut hipotesis induksi, p merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima. Begitu juga, q adalah bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima. Ini berarti pq adalah hasil kali beberapa bilangan prima.

Contoh 1.4

Misalkan kita akan menelusuri silsilah keluarga kita untuk mengetahui nenek moyang kita. Kita akan memberlakukan asumsi yang memudahkan yaitu bahwa untuk setiap nenek moyang kita, kita dapat menelusuri kedua orang tuanya atau kita tidak dapat menelusuri keduanya. Di dalam suatu silsilah keluarga, seseorang dinamakan 'daun' jika kita tidak memiliki catatan untuk menelusuri orang tuanya dan seseorang dinamakan sebagai 'simpul internal' jika orang tuanya telah ditelusuri.

Penyelesaian:

Kita akan menunjukkan bahwa di dalam suatu silsilah keluarga, banyaknya daun selalu satu lebih banyak daripada banyaknya simpul internal.

- (1') *Basis induksi.* Pernyataan ini benar bila $n = 1$. Bila hanya ada satu orang di dalam silsilah keluarga, orang ini adalah daun dan di sini tidak ada simpul internal.
- (2') *Langkah induksi.* Kita asumsikan bahwa pernyataan ini benar untuk semua silsilah dengan n orang, $1 \leq n \leq k$. Kita ingin menunjukkan bahwa pernyataan ini benar untuk sembarang silsilah keluarga dengan $k + 1$ orang. Perhatikan silsilah keluarga seorang laki-laki dengan $k + 1$ orang. Misalkan p menyatakan banyaknya daun dan q banyaknya simpul internal di dalam silsilah ini. Karena setidaknya ada tiga orang di dalam silsilah ini, kedua orang tua laki-laki ini pasti ada di dalam silsilah. Misalkan n_1 menyatakan banyaknya orang di dalam keluarga ayah laki-laki tadi, dengan p_1 di antaranya menjadi daun dan q_1 menjadi simpul internal. Misalkan n_2 menyatakan banyaknya orang di dalam keluarga ibu laki-laki tadi, dengan p_2 di antaranya menjadi daun dan q_2 menjadi simpul internal. Karena $n_1 \leq k$ dan $n_2 \leq k$, maka menurut hipotesis induksi

$$P_1 = q_1 + 1$$

$$P_2 = q_2 + 1$$

Karena

$$P = P_1 + P_2$$

$$q = q_1 + q_2 + 1$$

maka kita memperoleh

$$p = q_1 + q_2 + 2 = q + 1.$$

F. Latihan

1. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut adalah benar untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$.

a. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

c. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

- d. Untuk setiap bilangan bulat positif i , tersedia bola bertanda bilangan i yang tak terbatas jumlahnya. Awalnya kita diberi sekantung bola dan kita melemparkan bola-bola itu satu per satu. Kalau kita melemparkan bola yang bertanda i , kita mendapat ganti bola-bola yang bertanda $1, 2, \dots, i-1$. Permainan selesai bila kantung itu kosong. Kita ingin tahu apakah permainan ini selalu berakhir untuk berapapun jumlah bola yang diberikan pada awalnya.
2. Tentukanlah bilangan bulat pertama N sehingga pernyataan berikut benar untuk semua $n \geq N$ dan kemudian buktikanlah pernyataan tersebut.
- a. $3n + 25 < 3^n$
- b. $n - 100 > \log n$
- c. $n^2 < 2^n$

3. Untuk semua $n \geq 1$, tunjukkan bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan

- 3.
4. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang terbentuk dari $3n$ angka yang sama selalu habis dibagi oleh 3^n (misalnya, 222 dan 777 habis dibagi 3; 222 222 222 dan 555 555 555 habis dibagi 9).
5. Untuk membayar biaya pos sebesar n rupiah ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 rupiah dan perangko 5 rupiah sajan. Buktikan pernyataan itu benar.



PT. INDONESIA EMAS GROUP

BAB II

KOMBINATORIKA

A. Gambaran Umum

Pada BAB ini kita akan mempelajari tentang prinsip dasar perhitungan, permutasi, kombinasi, permutasi dan kombinasi multihimpunan, koefisien binomial, dan bilangan multinomial.

B. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran pada BAB ini yaitu

1. Mampu memahami prinsip dasar perhitungan.
2. Mampu membedakan permutasi dan kombinasi.
3. Mampu menyelesaikan permutasi dan kombinasi multihimpunan
4. Mampu memahami koefisien binomial
5. Mampu memahami bilangan multinomial

C. Dua Prinsip Dasar Perhitungan

Dua prinsip dasar perhitungan dan sejumlah konsekuensinya. Prinsip pertama sangat elementer, yaitu sebuah folunula berdasarkan prinsip bahwa keseluruhan sama dengan jumlah dari bagian-bagiannya.

Prinsip penjumlahan: *Jika sebuah himpunan objek-objek S dipartisi menjadi himpunan bagian $S_1, S_2, \dots, S_m$, maka banyaknya objek di S akan sama dengan jumlah banyaknya objek di $S_1, S_2, \dots, S_m$.*

Jika sebuah himpunan S dipartisi menjadi himpunan-himpunan bagian $S_1, S_2, \dots, S_m$, maka itu berarti tidak ada dua himpunan diantara $S_1, S_2, \dots, S_m$ yang beririsan. Dengan kata lain, setiap objek di S pasti merupakan anggota dari salah satu himpunan $S_1, S_2, \dots, S_m$. Dengan demikian maka himpunan $S_1, S_2, \dots, S_m$ merupakan **partisi** dari himpunan S .

Contoh 2.1

Siswa diminta mengambil salah satu kursus matematika atau biologi, tetapi tidak mengambil keduanya. Jika ada 4 macam kursus matematika dan 3 macam kursus biologi untuk dipilih siswa, maka siswa dapat memilih sebanyak $4 + 3 = 7$ macam pilihan.

Prinsip perkalian: *Jika himpunan A terdiri atas p objek dan himpunan B terdiri atas q objek, maka banyaknya pasangan terurut (a, b) dengan a anggota himpunan A dan b anggota himpunan B adalah $p \times q$ buah.*

Formula kedua untuk prinsip perkalian adalah: jika objek pertama dapat dipilih dalam p cara dan objek kedua dapat dipilih dalam q cara, maka banyaknya pilihan satu objek pertama dan satu objek kedua ada sebanyak $p \times q$ cara.

Contoh 2.2

Siswa harus mengambil dua macam kursus. Yang pertama harus memilih salah satu diantara 3 jam di pagi hari dan yang kedua memilih diantara 4 jam di sore hari. Banyaknya jadwal yang dapat dipilih oleh siswa adalah $3 \times 4 = 12$ pilihan.

Jenis persoalan kombinatorik ada beberapa tipe, yaitu:

- i) Menghitung atau menyeleksi objek-objek **terurut**
 - tanpa pengulangan,
 - dengan pengulangan.
- ii) Menghitung atau menyeleksi objek-objek **tak terurut**
 - tanpa pengulangan,
 - dengan pengulangan.

Untuk membedakan antara bukan pengulangan dan pengulangan objek-objek, kita akan bedakan antara penyusunan atau pemilihan dari himpunan dan multihimpunan. Pada multi-himpunan, unsur

dapat berulang, sedangkan pada himpunan, unsur tidak dapat berulang. Sebagai contoh, multi-himpunan $M = \{a, a, a, b, c, c, d, d, d, d\}$ mempunyai 10 unsur, yaitu 3 buah a , sebuah b , 2 buah c dan 4 buah d . Multihimpunan M tersebut biasa juga ditulis $M = \{3.a, 1.b, 2.c, 4.d\}$. Bilangan 3, 1, 2 dan 4 merupakan **bilangan pengulangan** pada multi-himpunan M . Sebuah himpunan dapat dipandang sebagai multi-himpunan yang mempunyai bilangan pengulangan yang sama, yaitu 1. Sebuah multi-himpunan N yang terdiri atas tak hingga unsur a dan c , serta unsur b dan d dengan pengulangan berturut-turut 2 dan 4, dapat dinotasikan dengan $N = \{\infty . a, 2.b, \infty .c, 4.d\}$.

Penyusunan atau pemilihan tipe i) disebut **permutasi**, sedangkan penyusunan atau pemilihan tipe ii) disebut **kombinasi**.

Contoh 2.3

Misalkan diberikan 6 buah huruf yaitu a, b, c, d, e dan f . Kita akan mengurutkan 3 huruf diantaranya. Apabila ketiga huruf tersebut tanpa pengulangan, maka akan diperoleh sebanyak $6.5.4 = 120$ buah urutan. Apabila boleh berulang (anggap multihimpunan dengan bilangan pengulangan ∞), maka akan diperoleh sebanyak $6.6.6 = 216$ buah urutan.

Contoh 2.4

Misalkan kita akan menghitung banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda. Bilangan antara 1000 dan 9999 merupakan susunan terurut dari 4 angka. Karena itu masalah kita adalah menghitung beberapa koleksi mengenai permutasi. Kita mempunyai 4 pilihan yaitu menentukan angka satuan, puluhan, ratusan dan ribuan. Karena bilangan yang kita hitung adalah bilangan ganjil, maka pilihan untuk angka satuan adalah 1, 3, 5, 7 dan 9. Angka puluhan dan ratusan dapat dipilih salah satu dari 0, 1, 2, ..., 9,

sedangkan angka ribuan salah satu dari 1, 2, ..., 9. Diperoleh 5 pilihan untuk angka satuan. Karena semua angkanya berbeda, kita mempunyai 8 pilihan untuk angka ribuan, 8 pilihan untuk angka ratusan dan 7 pilihan untuk angka puluhan. Berdasarkan prinsip perkalian, diperoleh

$$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240.$$

Jadi, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 adalah 2240.

D. Permutasi

Misalkan kita akan menghitung banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda. Bilangan antara 1000 dan 9999 merupakan susunan terurut dari 4 angka. Karena itu masalah kita adalah menghitung beberapa koleksi mengenai permutasi. Kita mempunyai 4 pilihan yaitu menentukan angka satuan, puluhan, ratusan dan ribuan. Karena bilangan yang kita hitung adalah bilangan ganjil, maka pilihan untuk angka satuan adalah 1, 3, 5, 7 dan 9. Angka puluhan dan ratusan dapat dipilih salah satu dari 0, 1, 2, ..., 9, sedangkan angka ribuan salah satu dari 1, 2, ..., 9. Diperoleh 5 pilihan untuk angka satuan. Karena semua angkanya berbeda, kita mempunyai 8 pilihan untuk angka ribuan, 8 pilihan untuk angka ratusan dan 7 pilihan untuk angka puluhan. Berdasarkan prinsip perkalian, diperoleh

$$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240.$$

Jadi, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 adalah 2240.

Contoh 2.5

Banyaknya kata yang terdiri atas 4 huruf berbeda yang dibentuk oleh huruf a , b , c , d dan e adalah $P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$.

Contoh 2.6

Misalkan kita akan menghitung banyaknya bilangan empat angka yang tidak mengandung angka-angka yang berulang. Karena ini adalah masalah penyusunan 4 angka di antara 10 angka 0, 1, ..., 9, maka jawabnya adalah $P(10,4) = 5040$. Diantara 5040 bilangan itu, $9 \times 8 \times 7 = 504$ diantaranya mempunyai angka 0 di depan. Dengan demikian, $5040 - 504 = 4536$ diantaranya tidak mempunyai angka 0 di posisi paling depan. Hasil ini juga dapat dihitung sebagai

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536.$$

Permutasi yang telah kita pelajari itu tepatnya disebut **permutasi Linier**. Kita pikirkan objek-objek tersebut telah diatur pada sebuah garis lurus. Jika sebagai pengganti menyusun objek-objek pada garis lurus, kita menyusunnya dalam bentuk lingkaran, maka banyaknya permutasi akan berkurang. Pikirkan contoh berikut ini. Andaikan 10 orang anak berbaris melingkar. Dalam berapa banyak cara berbeda mereka dapat membentuk lingkaran tersebut? Ketika mereka berpindah tempat, persoalannya adalah posisi relatif mereka terhadap yang lainnya dan tidak merupakan persoalan terhadap lingkungannya. Dengan demikian, dua permutasi melingkar dikatakan **sama** jika yang satu dapat dirubah menjadi yang lainnya dengan rotasi. Karena setiap permutasi linier terhadap anak-anak tersebut memberikan 9 permutasi lainnya dengan rotasi, maka untuk mendapatkan banyaknya permutasi melingkar kita harus membagi banyaknya permutasi linier dengan 10. Jadi, banyaknya permutasi melingkar yang terdiri atas 10 anak adalahl $\frac{10!}{10} = 9!$.

Teorema 2.1

Banyaknya permutasi melingkar r unsur dari sebuah himpunan dengan n unsur berbeda adalah

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$$

Khususnya, permutasi melingkar dari n unsur adalah $(n-1)!$

Contoh 2.7

Sebanyaknya 12 tanda-tanda khusus berbeda akan ditempatkan pada drum berputar. Masalah ini merupakan masalah permutasi melingkar dengan $n = r = 12$. Dengan demikian banyaknya cara ada sebanyak $\frac{P(12,12)}{12} = 11!$.

E. Kombinasi

Misalkan r bilangan bulat tidak negatif. Kombinasi r unsur dari sebuah himpunan S dengan n unsur *kita* memahaminya sebagai seleksi tak terurut r dari n unsur di S . Dengan kata lain, kombinasi r unsur dari sebuah himpunan S dengan n unsur adalah himpunan bagian S dengan r unsur. Jika $S = \{a, b, c, d\}$, maka $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ merupakan empat buah kombinasi dengan 3 unsur di S . Banyaknya kombinasi r unsur dari himpunan dengan n unsur dinotasikan dengan $C(n, r)$ atau $\binom{n}{r}$. Perhatikan bahwa jika $r > n$,

definisikan $C(n, r) = 0$. Jika $n = 0$ dan r bilangan bulat positif, maka $C(0, r) = 0$. Hal tersebut akan berakibat bahwa $C(0, 0) = \binom{0}{0} = 1$.

Fakta berikutnya adalah untuk bilangan bulat tidak negatif n berlaku $C(n, 0) = 1$, $C(n, 1) = n$ dan $C(n, n) = 1$.

Teorema 2.2

untuk $r \leq n$, $P(n, r) = r!C(n, r)$. Akibatnya, $C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Bukti :

Misalkan S adalah himpunan dengan n unsur. Kombinasi r pada S dapat diurutkan dalam $P(r, r) = r!$ cara. Karena setiap permutasi r pada S dapat menghasilkan secara unik urutan kombinasi r pada S , hal tersebut mengakibatkan $P(n, r) = r! C(n, r)$. Sekarang formula $C(n, r)$ dapat diperoleh dari formula $P(n, r)$ yang diberikan sebelumnya.

Contoh 2.8

Banyaknya barisan biner yang panjangnya 32 dan di dalam setiap barisan itu ada tepat tujuh angka 1 adalah $C(32, 7)$. Ini dapat dipandang sebagai masalah menempatkan tujuh angka 1 di dalam 32 kotak yang dinomori (dan kemudian mengisi kotak-kotak kosong sisanya dengan angka 0).

Contoh 2.9

Misalkan diberikan 25 titik yang terletak pada sebuah bidang datar dan tidak ada 3 titik yang kolinier. Berapa banyak garis lurus berbeda yang dapat dibuat melalui titik-titik tersebut? Berapa banyak segitiga berbeda yang dapat dibuat melalui titik-titik tersebut?

Karena tidak ada 3 titik yang terletak pada sebuah garis lurus, maka setiap pasang titik membentuk sebuah garis lurus. Dengan demikian banyaknya garis lurus berbeda yang dapat dibentuk sama dengan banyaknya himpunan bagian yang terdiri atas 2 unsur dari sebuah himpunan yang terdiri atas 25 unsur, yang ditunjukkan oleh

$$C(25, 2) = \frac{25!}{2!23!} = 300$$

Dengan cara yang sama, setiap 3 titik membentuk sebuah segitiga, sehingga banyaknya segitiga berbeda diberikan oleh

$$C(25, 3) = \frac{25!}{3!22!} = 2300.$$

Dari Teorema 2.2 diperoleh teorema akibat berikut ini.

Collary (Teorema Akibat) 2.1

Untuk $r < n$, $C(n, r) = C(n, n-r)$.

Teorema 2.3

Banyaknya himpunan bagian dari himpunan yang terdiri atas n unsur adalah $2n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$.

Bukti:

Kita buktikan teorema ini dengan memperlihatkan bahwa kedua ruas persamaan di atas adalah menghitung banyaknya himpunan bagian dari himpunan S yang terdiri atas n unsur. Pertama kita mengamati bahwa setiap himpunan bagian dari S adalah himpunan bagian dengan r unsur di S untuk $r = 0, 1, 2, \dots, n$. Karena $C(n, r)$ sama dengan banyaknya himpunan bagian dengan r unsur di S , hal itu mengikuti prinsip penjumlahan bahwa $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$ sama dengan banyaknya himpunan bagian di S .

Misalkan H suatu himpunan bagian dari S . Maka unsur ke-1 dari S dapat termasuk atau tidak termasuk dalam H . Demikian juga unsur ke-2, ke-3, ... dan ke- n dari S dapat termasuk atau tidak termasuk dalam H . Jadi, dengan prinsip perkalian terdapat $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ himpunan bagian S .

F. Permutasi dan Kombinasi Multihimpunan

Misal S sebuah multi-himpunan. Sebuah permutasi r di S adalah susunan teratur r unsur (yang tidak harus beda) di S . Jika banyaknya unsur S adalah n , maka sebuah permutasi n di S merupakan suatu permutasi di S . Sebagai contoh, jika $S = \{2.a, 1.b, 3.c\}$, maka $acbc$ dan $cbcc$ adalah permutasi-4 di S , sedangkan $abccca$ adalah permutasi-6 di S .

Multi-himpunan S tidak mempunyai permutasi-7, karena $7 > 2 + 1 + 3 = 6$, yaitu banyaknya unsur di S .

Dapat dibuktikan bahwa jika S multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda, masing-masing jenis objek memiliki bilangan pengulangan tak hingga, maka banyaknya permutasi- r di S adalah k^r .

Contoh 2.10

Misalkan diberikan multi-himpunan $S = \{\infty.0, \infty.1, \infty.2\}$. Banyaknya permutasi-4 dari multi-himpunan tersebut adalah $3^4 = 81$.

Teorema 2.4

Misalkan S multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda. Jika masing-masing jenis objek memiliki bilangan pengulangan $n_1, n_2, \dots, n_k$ dengan $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, maka banyaknya permutasi di S adalah

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Bukti:

Misalkan kita mempunyai multi-himpunan S dengan k jenis objek berbeda misalnya $a_1, a_2, \dots, a_k$ dengan bilangan pengulangan berturut-turut adalah $n_1, n_2, \dots, n_k$ sehingga S mempunyai $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ unsur. Kita perlu untuk membedakan banyaknya permutasi dari n unsur.

Terdapat n tempat dan kita ingin menempatkan secara tepat satu unsur di S dalam tempat yang berbeda. Pertama kita menentukan tempat-tempat mana yang ditempati oleh a_1 . Karena terdapat n_1 objek a_1 dalam S , kita harus memilih himpunan bagian n_1 tempat dari himpunan n tempat. Kita dapat mengerjakannya dalam $C(n, n_1)$ cara. Berikutnya kita menentukan tempat-tempat mana yang ditempati oleh a_2 . Terdapat $n - n_1$ tempat yang belum terisi dan kita pilih n_2

diantaranya. Hal ini dapat dikerjakan dengan $C(n-n_1, n_2)$ cara. Berikutnya kita mendapatkan $C(n-n_1-n_2, n_3)$ cara untuk memilih tempat untuk a_3 . Jika kita teruskan tentunya melibatkan prinsip perkalian. Kita peroleh banyaknya permutasi di S adalah

$$C(n, n_1) \cdot C(n-n_1, n_2) \cdot C(n-n_1-n_2, n_3) \dots C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}, n_k) .$$

Dengan menggunakan Teorema 2.1, diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!}$$

Setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Contoh 2.11

Permutasi huruf-huruf dalam kata MISSISSIPPI merupakan permutasi multihimpunan. Banyaknya permutasi adalah

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

Jika S sebuah multi-himpunan, maka sebuah **kombinasi-r** di S adalah memilih r unsur di S tanpa memperhatikan urutan. Jika S mempunyai n unsur, maka hanya ada satu kombinasi- n di S , yaitu S sendiri. Jika S mempunyai k objek berbeda, maka di S ada k

Contoh 2.12

Jika $S = \{2.a, 1.b, 3.c\}$, maka kombinasi-2 di S adalah $\{a,a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{c,c\}$.

Teorema 2.5

Misalkan S adalah multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda, masing-masing bilangan pengulangannya tak hingga. Banyaknya kombinasi- r di S adalah $C(k - 1 + r, r)$.

Bukti:

Misalkan k jenis objek berbeda itu adalah $a_1, a_2, \dots, a_k$ sehingga $S = \{\infty.a_1, \infty.a_2, \dots, \infty.a_k\}$. Sebuah kombinasi- r di S adalah berbentuk $\{x_1.a_1, x_2.a_2, \dots, x_k.a_k\}$ dimana $x_1, x_2, \dots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$. Sebaliknya, setiap barisan $x_1, x_2, \dots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ berkorespondensi dengan kombinasi- r di S . Dengan demikian banyaknya kombinasi- r di S sama dengan banyaknya solusi persamaan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ dalam bilangan bulat tak negatif. Kita tunjukkan bahwa banyaknya solusi itu sama dengan banyaknya permutasi dari multi-himpunan $T = \{(k-1).0, r.1\}$. Berikan sebuah permutasi di T , unsur 0 sebanyak $(k-1)$ dibagi r unsur 1 ke dalam k grup. Misalkan sebanyak x_1 unsur 1 di sebelah kiri unsur 0 pertama, sebanyak x_2 unsur 1 antara unsur 0 pertama dan kedua, ... dan sebanyak x_k unsur 1 di sebelah kanan unsur 0 terakhir. Maka ada $x_1, x_2, \dots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$. Sebaliknya, diberikan $x_1, x_2, \dots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$, kita dapat membalikkan tahapan di atas dan mengkonstruksi sebuah permutasi di S . Dengan demikian banyaknya kombinasi- r dari multi-himpunan S sama dengan banyaknya permutasi mufti-himpunan $T = \{(k - 1).0, r.1\}$. Menurut Teorema 2.4 bilangan terakhir sama dengan

$$\frac{(k - 1 + r)!}{(k - 1)! r!} = C(k - 1 + r, r).$$

Contoh 2.13

Jika $k = 4$ dan $r = 5$, maka permutasi dari $T = \{3, 0, 5, 1\}$ yang diberikan oleh barisan 0302 berkorespondensi dengan solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, yaitu $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 2$. Banyaknya *kombinasi-r* dari multi-himpunan S dengan k jenis objek berbeda, masing-masing bilangan pengulangannya tak hingga, adalah sama dengan banyaknya permutasi dari T yaitu $C(4 - 1 + 5, 5) = C(8, 5)$.

Contoh 2.14

Banyaknya cara memilih tiga dari tujuh hari yang disediakan (pengulangan dibolehkan) adalah

$$C(7 + 3 - 1, 3) = C(9, 3) = 84.$$

Contoh 2.15

Jika tiga dadu digulirkan, banyaknya jumlah mata berbeda yang mungkin adalah

$$C(6 + 3 - 1, 3) = C(8, 3) = 56$$

sebab pengguliran tiga dadu setara dengan pengambilan tiga bilangan dari enam bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, dengan pengulangan dibolehkan.

Teorema 2.6

Misalkan S adalah multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda, masing-masing bilangan pengulangannya tak hingga. Banyaknya kombinasi- r di S jika masing-masing jenis harus diambil minimal 1 adalah

$$C(r - 1, k - 1).$$

Contoh 2.16

Sebuah toko roti menjual 8 jenis roti. Bila kita membeli 12 buah roti dengan setiap jenisnya minimal 1 buah, kemungkinannya adalah $C(12 - 1, 8 - 1) = C(11, 7) = 330$.