



STRUKTUR ALJABAR LANJUT

Rizki Kurniawan Rangkuti, S.Pd., M.Pd.

Siti Suprihatiningsih, S.Pd., M.Pd. | Dr. Irvan, S.Pd., M.Si.

Marzuki Ahmad, S.Pd., M.Pd. | Sangkot Idris Ritonga, S.Pd., M.Si.

STRUKTUR ALJABAR LANJUT

Rizki Kurniawan Rangkuti, S.Pd., M.Pd
Siti Suprihatiningsih, S.Pd., M.Pd
Dr. Irvan, S.Pd., M.Si
Marzuki Ahmad, S.Pd., M.Pd
Sangkot Idris Ritonga, S.Pd., M.Si



STRUKTUR ALJABAR LANJUT

Penulis:

Rizki Kurniawan Rangkuti, S.Pd., M.Pd

Siti Suprihatiningsih, S.Pd., M.Pd

Dr. Irvan, S.Pd., M.Si

Marzuki Ahmad, S.Pd., M.Pd

Sangkot Idris Ritonga, S.Pd., M.Si

Editor:

Syifa Ismayanti

Layouter :

Tim Kreatif PRCI

Cover:

Rusli

Cetakan Pertama : januari 2025

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Rafflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024

; 18 x 25cm

ISBN : -

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kami sehingga kami berhasil menyelesaikan Buku dengan judul Struktur Aljabar Lanjut sesuai yang ditargetkan.

Buku ini berisikan pembahasan mendalam tentang berbagai konsep dan sifat dari struktur aljabar, dengan penekanan pada gelanggang, sub gelanggang, dan ideal prima. Kami berharap buku ini dapat menjadi referensi yang berguna bagi mahasiswa, dosen, dan siapa pun yang tertarik untuk memahami lebih jauh tentang teori aljabar.

Dalam buku ini juga membahas homomorfisma gelanggang mulai dari pengertian homomorfisma, kernel dari homomorfisma, homomorfisma natural hingga teorema fundamental homomorfisma. Kami menyadari bahwa Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun selalu kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Akhir kata, kami sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan Buku ini dari awal sampai akhir. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa meridhoi segala usaha kita. Amin.

Januari 2025, Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I GELANGGANG	1
BAB II GELANGGANG KOMUTATIF	7
BAB III SUB GELANGGANG	18
BAB IV SIFAT GELANGGANG	23
BAB V IDEAL PRIMA GELANGGANG	32
BAB VI HOMOMORFISMA GELANGGANG	45
DAFTAR PUSTAKA	53
BIODATA PENULIS	55

BAB I

GELANGGANG

A. Pengertian Gelanggang

Gelanggang (Bahasa Inggris: Ring) merupakan salah satu struktur aljabar yang dibahas dalam aljabar abstrak. Sebuah gelanggang terdiri dari sebuah himpunan dan dua operasi biner yang didasarkan pada operasi aritmetika penjumlahan dan perkalian. Pendasaran tersebut memudahkan teorema-teorema yang berlaku pada aritmetika diterapkan juga dalam objek-objek non-numerik, seperti polinomial, deret, matriks, dan fungsi.

Gelanggang adalah grup abelian dengan operasi biner kedua yang bersifat asosiatif, distributif terhadap operasi dari grup tersebut, dan memiliki unsur identitas. Mengambil istilah aritmetika, operasi yang berasal dari grup disebut penjumlahan dan operasi yang kedua disebut perkalian.

Berlaku atau tidaknya sifat komutatif dalam suatu gelanggang memiliki akibat yang besar pada objek tersebut. Oleh karena itu, teori gelanggang komutatif, atau sering disebut juga aljabar komutatif, adalah topik penting dalam teori gelanggang. Perkembangannya dipengaruhi oleh permasalahan dan ide yang berasal dari teori bilangan aljabar dan geometri aljabar.

Konseptualisasi gelanggang dimulai pada 1870-an dan diselesaikan pada 1920-an. Kontributor utama di antaranya Dedekind, Hilbert, Fraenkel, dan Noether. Gelanggang pertama kali dirumuskan sebagai bentuk umum dari domain Dedekind yang terdapat di teori bilangan, dan dari gelanggang polinomial dan gelanggang invarian yang terdapat di geometri aljabar dan teori invarian. Selanjutnya, gelanggang dipergunakan di cabang-cabang matematika yang lain seperti geometri dan analisis matematis.

Gelanggang merupakan struktur aljabar yang dilengkapi oleh dua operasi dengan sifat tertentu. Sebelum membahas gelanggang perhatikan definisi berikut:

Gelanggang adalah suatu himpunan tak hampa R dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) di katakan gelanggang dengan syarat harus memenuhi :

1. $(R, +)$ membentuk grup Komutatif yaitu memenuhi:

a. Sifat asosiatif yaitu jika memenuhi

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

untuk setiap a, b , dan c unsur unsur di R

b. Terdapat unsur 0 di R sehingga

$$0 + a = a + 0$$

untuk setiap a unsur di R

c. Terdapat balikan dari a yaitu $-a$ sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a$$

untuk setiap a unsur di R

d. Sifat Komutatif, yaitu jika memenuhi

$$a + b = b + a$$

e. untuk setiap a dan b unsur di R

2. $(R, \times)$ memenuhi sifat asosiatif yaitu :

$$a(bc) = (ab)c$$

untuk setiap a, b , dan c unsur unsur di R

3. $(R, +, \times)$ memenuhi sifat distributif

$$(a + b)c = a(b + c)$$

untuk setiap a, b , dan c unsur unsur di R

Jika gelanggang R memuat unsur kesatuan $1 \neq 0 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk setiap $a \in R$, R disebut gelanggang dengan unsur satuan. Dan jika untuk setiap a dan b unsur-unsur di R berlaku $ab=ba$, gelanggang R disebut gelanggang komutatif.

B. Gelanggang Bagian

Dalam contoh terdahulu telah di kenal bahwa gelanggang Z terkandung dalam gelanggang Q dan gelanggang R terkandung dalam gelanggang C . Dalam hal ini dapat dilihat bahwa operasi dari gelanggang yang lebih kecil adalah operasi dari gelanggang yang lebih besar dan dibatasi pada gelanggang yang lebih kecil adalah operasi dari gelanggang yang lebih besar dan dibatasi pada gelanggang yang lebih kecil.

Sebagai contoh dalam gelanggang C operasi perkalian didefinisikan sebagai berikut:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

sedangkan operasi itu dibatasi pada R berarti: operasi yang sama dengan pembatasan pada R sehingga terbentuk $(a + 0i)(c + 0i)$ dan didapat $(a + 0i)(c + 0i) = (ac + 0.0) + (a.0 + 0c)i = ac + 0i$ yang bernilai sama dengan ac .

Misalkan S himpunan bagian dari A . Himpunan S dinamakan gelanggang bagian dari gelanggang A . jika memenuhi

1. S gelanggang
2. Operasi penjumlahan dan perkalian dari S adalah operasi penjumlahan dan perkalian dari A yang dibatasi pada S .

Definisi tersebut tidak efisien untuk mengecek apakah suatu himpunan bagian dari gelanggang A merupakan gelanggang dari bagian A .

C. Daerah Integral

Dalam sub bab sebelumnya telah disinggung bahwa daerah integral adalah gelanggang komutatif dengan anggota satuan dan tidak mempunyai pembagi nol. Dalam sub bab ini akan dibahas tentang sifat-sifat dasar dari daerah integral.

Menurut Herstein tahun 1996, daerah integral dimisalkan R gelanggang komutatif, R disebut daerah integral jika untuk setiap $a, b \in R$ sedemikian sehingga

$$a \cdot b = 0_R$$

mengakibatkan

$$a = 0_R$$

atau

$$b = 0_R$$

D. Gelanggang Faktor

Gelanggang faktor (*quotient ring*) dinyatakan dalam definisi berikut ini :

Diketahui A gelanggang dan I sebagai ideal dalam A . Struktur aljabar A/I didefinisikan sebagai berikut:

1. $A/I = \{a + I \mid a \text{ dalam } A\}$
2. Operasi penjumlahan dalam A/I didefinisikan sebagai $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$

3. Dan operasi perkalian dalam A/I didefinisikan sebagai
 $(a + 1) + (b + 1) = ab + 1$

E. Homomorfisma Gelanggang

Dalam matematika, fungsi digunakan untuk mengaitkan anggota-anggota dari suatu sistem ke sistem lain dan untuk mentransformasikan suatu sistem yang diberikan kedalam sistem yang lebih sederhana. Fungsi atau pemetaan $f: X \rightarrow Y$ yang mengawetkan operasi yang didefinisikan pada sistem- sistemnya mempunyai sifat yang menarik yaitu, dengan menganalisis peta dari f dapat digunakan untuk melihat sifat dari X dan sebaliknya.

Berikut ini diberikan definisi formal dari fungsi yang mengawetkan. Operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada gelanggang.

F. Modul Faktor

Dalam aljabar abstrak, Modul merupakan dua himpunan (grup abel dan ring) yang memiliki suatu operasi biner. Dengan demikian, modul atas lapangan adalah bentuk umum dari ruang vektor dimana operasi penjumlahan dipenuhi oleh grup abel dan perkalian antara grup abel dengan skalar dari lapangan.

Layaknya struktur aljabar, modul memiliki submodul yang didasari dari himpunan bagian yang didasari dari himpunan bagian dari modul yang tertutup pada operasi biner yang sama. Modul sederhana merupakan modul yang tidak memiliki submodul sejati yaitu dapat diartikan submodul dari modul sederhana adalah submodul trivial $\{0\}$ dan dirinya sendiri. Sifat-sifat yang dikaji pada modul sederhana mengarah pada Teorema Jacobson Density.

Teorema Jacobson Density telah dibuktikan oleh Nathan Jacobson dalam karya tulisnya "Structure theory of simple rings without finiteness assumption", Trans. Amer. Math. Soc., 1945. Dalam matematika, khususnya dalam teori ring non-komulatif, aljabar modern, dan teori modul, Teorema Jacobson Density adalah teorema yang dikonsentrasikan dalam pembahasan modul sederhana atas ring R primitif yang merupakan dense ring endomorfisma dari ruang vektor atas ring divisi. Modul atas ring R merupakan suatu generalisasi dari ruang vektor atas suatu lapangan/field.

Berikut definisi modul dan beberapa kajian terkait untuk Teorema Jacobson Density. Misalkan R adalah gelanggang (tidak harus komutatif). R -modul Kiri (atau Modul Kiri dari R) adalah sebuah peta perkalian skalar.

G. Gelanggang dengan Elemen Satuan

Misalkan B adalah himpunan semua bilangan bulat, dan $R = B \times B = \{(a, b) | a, b \text{ bilangan} - \text{bilangan bulat}\}$.

Operasi-operasi $*$ dan $\circ$ pada R didefinisikan oleh:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d) \text{ dan}$$

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bd),$$

$$(a, b), (c, d)$$

Akan dibuktikan bahwa $(R, *, \circ)$ adalah suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

Bukti:

$(R, *)$ adalah suatu grup abelian (karena anggota dari R adalah bilangan bulat dan bilangan bulat membentuk grup abelian pada operasi penjumlahan).....(*)

$(R, \circ)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen satuan.

$$(a, b), (c, d)$$

$$R, (a, b) \circ (c, d) = (ac, bd)$$

R memiliki sifat asosiatif

$$(a, b), (c, d), (e, f)$$

$$R, (a, b) \circ [(c, d) \circ (e, f)] = (a, b) \circ (ce, df)$$

$$= (ace, bdf)$$

$$= (ac, bd) \circ (e, f)$$

$$= [(a, b) \circ (c, d)] \circ (e, f)$$

R memiliki sifat komutatif

$$(a, b), (c, d)$$

$$R, (a, b) \circ (c, d) = (ac, bd)$$

$$= (ca, db)$$

$$= (c, d) \circ (a, b)$$

R memiliki elemen satuan

$$(a, b), (1, 1)$$

$$\begin{aligned} R, (a, b) \circ (1, 1) &= (a1, b1) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

Jadi, $(R, \circ)$ adalah semi grup komutatif dengan elemen satuan..... (**)

R memiliki sifat distributif kanan

$$(a, b), (c, d), (e, f)$$

$$\begin{aligned} R, (a, b) \circ [(c, d) * (e, f)] &= (a, b) \circ (c + e, d + f) \\ &= (ac + ae, bd + bf) \\ &= (ac, bd) * (ae, bf) \\ &= [(a, b) \circ (c, d)] * [(a, b) \circ (e, f)] \end{aligned}$$

R memiliki sifat distributif kiri

$$(a, b), (c, d), (e, f)$$

$$\begin{aligned} R, [(c, d) * (e, f)] \circ (a, b) &= (c + e, d + f) \circ (a, b) \\ &= (ca + ea, db + fb) \\ &= (ca, db) * (ea, fb) \\ &= [(c, d) \circ (a, b)] * [(e, f) \circ (a, b)] \end{aligned}$$

Jadi, sifat distributif kanan dan distributif kiri dipenuhi.....(***)

Berdasarkan (*), (**), dan (***) maka terbukti bahwa $(R, *, \circ)$ adalah suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

BAB II

GELANGGANG KOMUTATIF

A. Pengertian Gelanggang Komutatif

Gelanggang komutatif adalah gelanggang dengan operasi perkalian komutatif. Gelanggang adalah himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi yang menggabungkan dua elemen gelanggang ke sepertiga. Mereka disebut penjumlahan dan perkalian dan biasanya dilambangkan dengan "+" dan "."; misalnya $a + b$ dan $a \cdot b$. Untuk membentuk sebuah gelanggang, kedua operasi menggunakan sejumlah sifat: gelanggang berupa grup abelian di bawah penjumlahan serta monoid di bawah perkalian, dimana perkalian distributif lebih dari penjumlahan yaitu, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Elemen identitas untuk penjumlahan dan perkalian dilambangkan dengan 0 dan 1.

Jika perkalian komutatif, yaitu

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

maka gelanggang R disebut komutatif.

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ adalah suatu himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) pada R yang memenuhi aksioma&aksioma berikut :

1. Tertutup terhadap penjumlahan (+)
Misalkan a dan b adalah anggota R ,
maka a dan b tertutup bila $a + b \in R$
2. Asosiatif terhadap penjumlahan (+)
Misalkan $a, b, c \in R$
maka $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan (+)
Misalkan $a \in R$ maka $a + e = e + a = a$
4. Adanya unsur balikan atau invers terhadap penjumlahan (+)
Misalkan $a \in R$
maka $a + (-a) = (-a) + a = e = 0$
5. Komutatif terhadap penjumlahan (+)
Misalkan $a, b \in R$
maka $a + b = b + a$

6. Tertutup terhadap penjumlahan (+)
Misalkan a dan b adalah anggota R ,
maka a dan b tertutup bila $a + b \in R$
7. Asosiatif terhadap perkalian (.)
Misalkan $a, b, c \in R$
maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
8. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap perkalian (.)
Misalkan $a \in R$
maka $a \cdot e = e \cdot a = a$
9. Distributif perkalian (.) terhadap penjumlahan (+)
Misalkan $a, b, c \in R$
maka $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Dari definisi tersebut dapat kita simpulkan bahwa suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner $(R, +, \cdot)$ dikatakan suatu Ring (Gelanggang) bila :

1. $(R, +)$ merupakan suatu Grup Komutatif
2. $(R, \cdot)$ merupakan suatu Semigrup/Monoid (Catatan : Beberapa penulis buku mengatakan bahwa di dalam suatu Ring tidak perlu mempunyai identitas terhadap perkalian)
3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

Sebagai catatan yang perlu diingat pada konsep Ring bahwa notasi untuk kedua operasi tersebut boleh apa saja, misalkan $(R, +, \circ)$ ataupun $(R, +, *)$ ataupun yang lainnya. Kita juga bebas menamakan mana yang merupakan operasi yang pertama ataupun mana operasi yang kedua, asalkan operasi biner tersebut memenuhi syarat&syarat suatu Ring.

Contoh 2.1 :

Tunjukkan bahwa Z_4 adalah merupakan suatu Ring.

Penyelesaian :

Tabel 2.1 Daftar Cayley $(Z_4, +)$ dan $(Z_4, \cdot)$ -0

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dari Tabel 2.1. akan ditunjukkan bahwa $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan suatu gelanggang bila memenuhi :

1. Grup Komutatif terhadap penjumlahan ($Z_4, +$)

- Tertutup

Ambil sebarang nilai dari Z_4

misalkan $0, 1, 2, 3 \in Z_4$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 3 = 0$$

karena hasilnya $0, 1, 2, 3 \in Z_4$, maka tertutup terhadap Z_4

- Asosiatif

Ambil sebarang nilai dari Z_6

misalkan $a = 2, b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

$$(a + b) + c = (2 + 1) + 3 = 3 + 3 = 2$$

$$a + (b + c) = 2 + (1 + 4) = 2 + 4 = 2$$

Sehingga :

$$(a + b) + c = a + (b + c) = 2$$

maka Z_4 asosiatif

- Adanya unsur satuan atau identitas Ambil sebarang nilai dari Z_4

- misalkan $0 \in Z_4$

$$0 + e = e + 0 = 0$$

- misalkan $1 \in Z_4$

$$1 + e = e + 1 = 1$$

- misalkan $2 \in Z_4$

$$2 + e = e + 2 = 2$$

- misalkan $3 \in Z_4$

$$3 + e = e + 3 = 3$$

maka Z_4 ada unsur satuan atau identitas

- Adanya unsur balikan atau invers

- Ambil sebarang nilai dari Z_4 ,

misalkan $0 \in Z_4$, pilih $0 \in Z_4$,

sehingga $0 + 0 = 0 = e$,

maka $(0)^{-1} = 0$

- Ambil sebarang nilai dari Z_4 ,

misalkan $1 \in Z_4$, pilih $3 \in Z_4$,

sehingga $1 + 3 = 0 = e$,

- maka $(1)-1 = 3$
 - Ambil sebarang nilai dari Z_4 ,
misalkan $2 \in Z_4$, pilih $2 \in Z_4$,
sehingga $2 + 2 = 0 = e$,
maka $(2)-1 = 2$
 - Ambil sebarang nilai dari Z_4 ,
misalkan $3 \in Z_4$, pilih $1 \in Z_4$,
sehingga $3 + 1 = 0 = e$,
maka $(3)-1 = 1$
maka Z_4 ada unsur balikan atau invers
- Komutatif
Ambil sebarang nilai dari Z_4 misalkan $a = 2, b = 3 \in Z_4$
 $(a + b) = (2 + 3) = 1$
 $(b + a) = (3 + 2) = 1$
 Sehingga :
 $(a + b) = (b + a) = 1$
 maka Z_4 komutatif
 Jadi, $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(Z_4, +)$.

2. Semigrup terhadap perkalian $(Z_4, \cdot)$

- Tertutup
Ambil sebarang nilai dari Z_4 misalkan $0, 1, 2, 3 \in Z_4$
 $1 \cdot 0 = 0$
 $1 \cdot 1 = 1$
 $1 \cdot 2 = 2$
 $1 \cdot 3 = 3$
 karena hasilnya $0, 1, 2, 3 \in Z_4$, maka tertutup terhadap Z_4
- Asosiatif
Ambil sebarang nilai dari Z_4
misalkan $a = 2, b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$
 $(a \cdot b) \cdot c = (2 \cdot 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 2$
 $a \cdot (b \cdot c) = 2 \cdot (1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 2$
 Sehingga :
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = 2$
 maka Z_4 asosiatif
 Jadi, $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan Semigrup terhadap perkalian $(Z_4, \cdot)$.

3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

Ambil sebarang nilai dari Z_4

misalkan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

$$a.(b + c) = 2.(1 + 3)$$

$$= 2.(0)$$

$$= 0$$

$$(a.b) + (a.c) = (2.1) + (2.3)$$

$$= 2 + 6$$

$$= 0$$

$$\text{maka, } a.(b + c) = (a.b) + (a.c) = 0$$

$$(a + b).c = (2 + 1).3$$

$$= (3).3$$

$$= 1$$

$$(a.c) + (b.c) = (2.3) + (1.3)$$

$$= 2 + 3$$

$$= 1$$

$$\text{maka, } (a + b).c = (a.c) + (b.c) = 1$$

Jadi, $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ distributive perkalian terhadap penjumlahan.

Karena $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka Z_4 adalah suatu Ring $(Z_4, +, .)$

Definisi 2.1 :

Suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner $(R, +, .)$ dikatakan suatu Ring (Gelanggang) Komutatif (Abelian) bila :

1. $(R, +)$ merupakan suatu Grup Komutatif
2. $(R, .)$ merupakan suatu Semigrup/Monoid Komutatif
3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

Jadi, pada Ring Komutatif $(R, .)$ yang merupakan suatu Semigrup/Monoid harus memenuhi sifat-sifat komutatifnya, yaitu :

$$a . b = b . a, a, b \in R$$

Contoh 2.2 :

Dari contoh 6.1, tunjukkan bahwa Ring $(Z_4, +, .)$ merupakan suatu Ring Komutatif.

Penyelesaian :

Dari contoh 6.1, telah ditunjukkan bahwa $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah suatu Ring $(Z_4, +, .)$.

Sekarang akan ditunjukkan sifat komutatif dari Ring tersebut.

$$a . b = b . a, a, b \in Z_4$$

Ambil sebarang nilai dari Z_4 ,

misalkan 2 dan $3 \in Z_4$

(pada tabel 6.1.)

$$2 \cdot 3 = 2$$

$$3 \cdot 2 = 2$$

sehingga $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 2$

Karena Ring $(Z_4, +, \cdot)$ tersebut memenuhi sifat komutatif, maka Ring $(Z_4, +, \cdot)$ tersebut adalah Ring Komutatif atau Ring Abelian.

Contoh 2.3 :

Misalkan $P = \{\text{genap, ganjil}\}$ dan $P \in \mathbb{Z}$. Tunjukkan bahwa elemen-elemen bilangan “genap” dan “ganjil” adalah suatu Ring Komutatif.

Penyelesaian :

Tabel 2.2.
Daftar Cayley $(P, +)$ dan $(P, \cdot)$

+	genap	ganjil	.	genap	ganjil
genap	genap	ganjil	genap	genap	genap
ganjil	ganjil	genap	ganjil	genap	ganjil

Dari Tabel 6.2. akan ditunjukkan bahwa $P = \{\text{genap, ganjil}\}$ merupakan suatu Ring Komutatif bila memenuhi :

1. Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(P, +)$

- Tertutup

Ambil sebarang nilai dari P misalkan $\text{genap, ganjil} \in P$

$$\text{genap} + \text{genap} = \text{genap}$$

$$\text{genap} + \text{ganjil} = \text{ganjil}$$

$$\text{ganjil} + \text{ganjil} = \text{genap}$$

karena hasilnya genap dan ganjil $\in P$, maka tertutup terhadap P

- Asosiatif

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan $a = \text{genap}$, $b = \text{ganjil}$ dan $c = \text{genap} \in P$

$$(a + b) + c$$

$$= (\text{genap} + \text{ganjil}) + \text{genap} = \text{ganjil} + \text{genap} = \text{ganjil}$$

$$a + (b + c)$$

$$= \text{genap} + (\text{ganjil} + \text{genap}) = \text{genap} + \text{ganjil} = \text{ganjil}$$

Sehingga : $(a + b) + c = a + (b + c) = \text{ganjil}$ maka P asosiatif

- Adanya unsur satuan atau identitas
 1. Ambil sebarang nilai dari P ,
misalkan $\text{genap} \in P$, pilih $\text{genap} \in P$,
sehingga $\text{genap} + e = e + \text{genap} = \text{genap}$,
maka $e = \text{genap}$
 2. Ambil sebarang nilai dari P ,
misalkan $\text{ganjil} \in P$, pilih $\text{genap} \in P$,
sehingga $\text{ganjil} + e = e + \text{ganjil} = \text{ganjil}$,
maka $e = \text{genap}$
maka P ada unsur satuan atau identitas
 - Adanya unsur balikan atau invers
 - Ambil sebarang nilai dari P ,
misalkan $\text{genap} \in P$, pilih $\text{genap} \in P$,
sehingga $\text{genap} + \text{genap} = \text{genap} = e$,
maka $(\text{genap})^{-1} = \text{genap}$
 - Ambil sebarang nilai dari P ,
misalkan $\text{ganjil} \in P$, pilih $\text{ganjil} \in P$,
sehingga $\text{ganjil} + \text{ganjil} = \text{ganjil} = e$,
maka $(\text{ganjil})^{-1} = \text{ganjil}$
maka P ada unsur balikan atau invers
 - Komutatif
Ambil sebarang nilai dari P
misalkan $a = \text{genap}$, $b = \text{ganjil} \in P$
 $(a + b) = (\text{genap} + \text{ganjil}) = \text{ganjil}$
Sehingga :
 $(a + b) = (b + a) = \text{ganjil}$
maka P komutatif
- Jadi, $P = \{\text{genap}, \text{ganjil}\}$ merupakan Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(P, +)$.

2. Monoid terhadap perkalian $(P, \cdot)$

- Tertutup
Ambil sebarang nilai dari P misalkan genap dan $\text{ganjil} \in P$
 $\text{ganjil} \cdot \text{genap} = \text{genap}$
 $\text{genap} \cdot \text{genap} = \text{genap}$
 $\text{ganjil} \cdot \text{ganjil} = \text{ganjil}$
karena hasilnya genap dan $\text{ganjil} \in P$, maka tertutup terhadap P

- Asosiatif

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan $a = \text{genap}$, $b = \text{ganjil}$ dan $c = \text{genap} \in P$

$(a \cdot b) \cdot c = (\text{genap} \cdot \text{ganjil}) \cdot \text{genap} = \text{genap} \cdot \text{genap} = \text{genap}$ a .

$(b \cdot c) = \text{genap} \cdot (\text{ganjil} \cdot \text{genap}) = \text{genap} \cdot \text{genap} = \text{genap}$

Sehingga :

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = \text{genap}$

maka P asosiatif

- Adanya unsur satuan atau identitas

Ambil sebarang nilai dari P, misalkan $\text{genap} \in P$, pilih $\text{ganjil} \in P$,

sehingga $\text{genap} \cdot e = e \cdot \text{genap} = \text{genap}$,

maka $e = \text{ganjil}$

Ambil sebarang nilai dari P,

misalkan $\text{ganjil} \in P$, pilih $\text{ganjil} \in P$,

sehingga $\text{ganjil} + e = e + \text{ganjil} = \text{ganjil}$,

maka $e = \text{ganjil}$

maka P ada unsur satuan atau identitas

- Komutatif

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan $a = \text{genap}$, $b = \text{ganjil} \in P$

$(a \cdot b) = (\text{genap} \cdot \text{ganjil}) = \text{genap}$

$(b \cdot a) = (\text{ganjil} \cdot \text{genap}) = \text{genap}$

Sehingga :

$(a \cdot b) = (b \cdot a) = \text{genap}$

maka P komutatif

Jadi, $P = \{\text{genap}, \text{ganjil}\}$ merupakan Monoid Komutatif terhadap perkalian $(P, \cdot)$.

3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan Ambil sebarang nilai dari P

Misalkan $a = \text{genap}$, $b = \text{ganjil}$ dan $c = \text{genap} \in P$

- $a \cdot (b + c) = \text{genap} \cdot (\text{ganjil} + \text{genap})$
 $= \text{genap} \cdot (\text{ganjil})$
 $= \text{genap}$
- $(a \cdot b) + (a \cdot c) = (\text{genap} \cdot \text{ganjil}) + (\text{genap} \cdot \text{genap})$
 $= \text{genap} + \text{genap}$
 $= \text{genap}$

maka, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = \text{genap}$

- $(a + b).c = (\text{genap} + \text{ganjil}). \text{genap}$
 $= (\text{ganjil}). \text{genap}$
 $= \text{genap}$
- $(a.c) + (b.c) = (\text{genap}. \text{genap}) + (\text{ganjil}. \text{genap})$
 $= \text{genap} + \text{genap}$
 $= \text{genap}$

maka, $(a + b).c = (a.c) + (b.c) = \text{genap}$

Jadi, $P = \{\text{genap}, \text{ganjil}\}$ distributive perkalian terhadap penjumlahan.

Karena $P = \{\text{genap}, \text{ganjil}\}$ memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka P adalah suatu **Ring Komutatif $(P, +, \cdot)$** .

B. Gelanggang Komutatif Dengan Elemen Satuan

Misalkan $C = \{(a,b) \mid a,b \text{ bilangan-bilangan bulat}\}$.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada C didefinisikan sebagai berikut : $(a,b), (c,d)$

$(C, +, \cdot)$

$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ dan

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Akan dibuktikan bahwa $(C, +, \cdot)$ adalah suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

Bukti :

$(C, +)$ adalah suatu grup abelian (karena anggota dari C adalah bilangan bulat dan bilangan bulat membentuk grup abelian pada operasi penjumlahan).....(*)

$(C, \cdot)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen satuan.

$(a,b), (c,d)$

$(C, \cdot)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Asosiatif

$(a,b), (c,d), (e,f)$

$$\begin{aligned}
 C, (a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)] &= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) \\
 &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\
 &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\
 &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\
 &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e,f) \\
 &= [(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f)
 \end{aligned}$$

Komutatif

$(a,b), (c,d)$

$$\begin{aligned}C, (a,b) \cdot (c,d) &= (ac - bd, ad + bc) \\&= (ca - db, bc + ad) \\&= (ca - db, cb + da) \\&= (c,d) \cdot (a,b)\end{aligned}$$

Elemen satuan

$(a,b), (1,0)$

$$\begin{aligned}C, (a,b) \cdot (1,0) &= (a1 - b0, a0 + b1) \\&= (a,b)\end{aligned}$$

Jadi, $(C, \cdot)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen satuan.....(**)

Sifat Distributif

Sifat Distributif Kanan

$(a,b), (c,d), (e,f)$

$$\begin{aligned}C, (a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] &= (a,b) \cdot (c + e, d + f) \\&= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) \\&= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\&= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\&= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\&= [(a,b) \cdot (c,d)] + [(a,b) \cdot (e,f)]\end{aligned}$$

Sifat Distributif Kiri

$(a,b), (c,d), (e,f)$

$$\begin{aligned}C, [(c,d) + (e,f)] \cdot (a,b) &= (c + e, d + f) \cdot (a,b) \\&= ((c+e)a - (d+f)b, (c+e)b + (d+f)a) \\&= (ca + ea - db - fb, cb + eb + da + fa) \\&= (ca - db + ea - fb, cb + da + eb + fa) \\&= (ca - db, cb + da) + (ea - fb, eb + fa) \\&= [(c,d) \cdot (a,b)] + [(e,f) \cdot (a,b)]\end{aligned}$$

Jadi, sifat distributif kanan dan distributif kiri dipenuhi.....(***)

Berdasarkan (*), (**), dan (***) maka terbukti bahwa $(C, +, \cdot)$ adalah suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

Evaluasi :

Diketahui $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

Operasi-operasinya didefinisikan sebagai berikut :

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(a,b) \times (c,d) = (ad, bc)$$

Tentukan elemen satuannya!

Elemen satuan

$(a,b), (1,1)$

$$\begin{aligned} R, (a,b) \cdot (1,1) &= (a1, b1) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

BAB III

SUB GELANGGANG

Dalam grup, kita telah mengenal anak grup (sub grup), dalam pembahasan ini kita akan mempelajari anak gelanggang (subring).

Definisi 3.1

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring. Suatu himpunan S disebut sebagai subring dari R jika $S \neq \emptyset$, $S \subset R$, dan S adalah suatu ring terhadap kedua operasi yang sama dengan R (penjumlahan dan perkalian).

Perhatikan bahwa operasi-operasi dalam S harus sama dengan operasi-operasi dalam R . Misalkan Z adalah elemen nol dari R , maka $\{ Z \}$ merupakan anak gelanggang dari R . Demikian pula karena $R \subset R$, maka R juga merupakan anak gelanggang dari R , selanjutnya $\{Z\}$ dan R masing-masing disebut anak gelanggang tak sejati (trivial) dari R . Anak gelanggang lainnya dari R (jika ada) disebut anak gelanggang sejati.

Teorema 3.1

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring, $S \subset R$, dan $S \neq \emptyset$. S adalah subring dari R jika

$\forall a, b \in S$, berlaku :

- (i) $a - b \in S$, dan
- (ii) $ab \in S$

Bukti :

Jika S merupakan subring dari R , maka S terhadap operasi $(+)$ merupakan grup abelian sehingga berlaku 5 sifat yaitu : Tertutup, Asosiatif, Identitas, Invers, dan Komutatif. Pada operasi $(\cdot)$ merupakan semi grup (berlaku sifat tertutup dan asosiatif) dan memenuhi sifat distributif kanan dan kiri.

Dengan modal tersebut, pada operasi $(+)$ S berlaku $\forall a, b \in S$, $a+b \in S$ (tertutup)

dan $\forall b \in S$, $\exists -b \in S$ (invers) sehingga $\forall a, -b \in S$, $a + (-b) = a - b \in S$. pada operasi $(\cdot)$ berlaku sifat tertutup sehingga $\forall a, b \in S$, $ab \in S$.

Contoh 1 :

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan suatu Ring, buktikan bahwa $S = \{0, 2\}$ adalah Subring dari Z_4 .

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $S = \{0, 2\}$ memenuhi syarat-syarat dari suatu Ring.

1. $S \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $S = \{0, 2\}$
2. $S \subset \mathbb{Z}_4$, karena $\forall a \in S, a \in \mathbb{Z}_4$, yaitu $\{0, 2\} \subset \mathbb{Z}_4$
3. $a - b \in S$, Misalkan $0, 2 \in S$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Berdasarkan Tabel Cayley $\mathbb{Z}_4$, 0^{-1} adalah 0 dan 2^{-1} adalah 2, dengan demikian diperoleh

+4	0^{-1}	2^{-1}
	0	2
2	2	0

Sehingga terbukti $\forall a, b \in S, a - b \in S$

1. $a \cdot b \in S$, Misalkan $0, 2 \in S$

$\times 4$	0	2
0	0	0
2	0	0

Sehingga terbukti $\forall a, b \in S, 0 \in S$

Karena semua syarat telah terpenuhi maka S adalah Subring dari $\mathbb{Z}_4$.

Misalkan B adalah gelanggang bilangan-bilangan bulat dengan penjumlahan dan perkalian biasa $G =$ himpunan semua bilangan genap. Maka G adalah anak gelanggang dari B . Lebih umum jika m suatu bilangan bulat dan $m \neq 0$, maka $M = \{ma \mid a \in B\}$ yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan m adalah anak gelanggang dari B . hal ini dapat di tunjukan sebagai berikut:

Ambil $x, y \in M$ maka $x = ma$ dan $y = mb$ dengan $a, b \in B$, maka:

- (i) $x - y = ma - mb = m(a - b)$. Karena $a, b \in B$, maka $(a - b) \in B$, sehingga $m(a - b) \in M$. Jadi $x - y \in M$.

(ii) $xy = (ma)(mb) = m(mab)$ karena $m, a, b \in B$, maka $mab \in B$, sehingga $m(mab) \in M$. Jadi $xy \in M$

Dari (i) dan (ii) maka M adalah anak gelanggang dari B .

Contoh 2 :

Buktikan bahwa $M = \{ma \mid a \in 2Z, m \in Z\}$ adalah Subring dari $2Z$.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $M = \{ma \mid a = 2k, m, k \in Z\}$ memenuhi syarat-syarat dari suatu Ring.

1. $M \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $\exists e = 0 = m.0 = m(2.0) \in M$

2. $M \subset 2Z$, karena $\forall x \in M$, maka $x = m(2k) = 2(mk) \in 2Z$

3. $a - b \in M$

Misalkan $a, b \in M$, dengan $a = mx, b = my, x, y \in 2Z$, sehingga $x = 2k_1$ dan $y = 2k_2, m, k_1, k_2 \in Z$, maka

$$\begin{aligned} a - b &= mx - my \\ &= m(x - y) \\ &= m(2k_1 - 2k_2) \\ &= m \cdot 2(k_1 - k_2) \end{aligned}$$

Karena $m, k_1, k_2 \in Z$ maka $(k_1 - k_2) \in Z$, sehingga $2(k_1 - k_2) \in 2Z$ sedemikian hingga $m \cdot 2(k_1 - k_2) \in M$. Jadi $a - b \in M$

1. $a \cdot b \in M$

Misalkan $a, b \in M$, dengan $a = mx, b = my, x, y \in 2Z$, sehingga $x = 2k_1$ dan $y = 2k_2, m, k_1, k_2 \in Z$, maka :

$$\begin{aligned} ab &= (mx)(my) \\ &= (m \cdot 2k_1)(m \cdot 2k_2) \\ &= m \cdot 2(2m k_1 k_2) \end{aligned}$$

Karena $m, k_1, k_2 \in Z$ maka $(2m k_1 k_2) \in Z$, sehingga $2(2m k_1 k_2) \in 2Z$ sedemikian hingga $m \cdot 2(2m k_1 k_2) \in M$. Jadi $ab \in M$.

Karena semua syarat telah terpenuhi maka M adalah Subring dari $2Z$.

Misalkan R adalah gelanggang bilangan bilangan real terhadap penjumlahan dan perkalian biasa, Q adalah himpunan semua bilangan bilangan rasional, B adalah himpunan semua bilangan bulat, M adalah himpunan bilangan-bilangan bulat kelipatan m , dengan m suatu bilangan bulat. Maka Q, B dan M masing masing adalah anak gelanggang dari R

Bukti:

$\{R, +, \cdot\}$

Q = Himpunan Semua Bilangan Rasional,

B = Himpunan semua bilangan bulat

M = Himpunan Bilangan-Bilangan bulat kelipatan m

m = bilangan bulat

maka $Q \supset B \supset M \supset R$

Definisi 3.2

Misalkan $(F, +, \cdot)$ Suatu medan, $S \subset F$ dan $S \neq \emptyset$. Apabila $(S, +, \cdot)$ suatu medan, maka dikatakan bahwa S adalah anak medan (sub field) dari F. Pembaca dapat mendefinisikan untuk S adalah anak gelanggang pembagian dari P, jika P suatu gelanggang pembagian.

Dari definisi tersebut jelas bahwa F adalah anak medan dari F sendiri dan disebut anak medan tak sejati dari F. Anak medan dari F (jika ada) yang berbeda dengan F disebut anak medan sejati dari F. Suatu medan yang tidak mempunyai anak medan sejati disebut *medan prima*.

Contoh : Q yaitu medan bilangan-bilangan rasional dengan penjumlahan dan perkalian biasa adalah suatu medan prima. Demikian pula $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ Terhadap perjumlahan mod 5 dan perkalian mod 5 adalah suatu medan prima.

Teorema 3.2

Misalkan suatu gelanggang tanpa elemen kesatuan dan S suatu anak gelanggang dari R. Jika S mempunyai elemen kesatuan maka elemen kesatuan tersebut adalah suatu elemen PNS kiri atau kanan dalam R.

Buktikan: misalkan elemen kesatuan dari S adalah us maka $us = a$
 $usa = a \forall a \in S$. karena us hanya merupakan elemen kesatuan dalam S, maka adanya $y \in R - S$ sedemikian hingga terdapat beberapa kemungkinan elemen kesatuan dalam menentukan pembagi nol sejati (pns).

1. R memiliki elemen kesatuan tetapi S tidak memiliki elemen kesatuan
2. R memiliki kesatuan UR , S memiliki elemen kesatuan Us dan $UR = Us$
3. R memiliki kesatuan UR , S memiliki kesatuan Us , tetapi $UR \neq Us$

Contoh 3 :

Buktikan bahwa $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ adalah Subring dari R .
 Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ memenuhi syarat-syarat dari suatu Ring.

1. $Q(\sqrt{3}) \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $Q(\sqrt{3}) = \{0 + 0\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$
2. $Q(\sqrt{3}) \subset R$, karena $\forall x \in Q(\sqrt{3})$, maka $x = a + b\sqrt{3} \in R$
3. $a - b \in Q(\sqrt{3})$

Misalkan $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3})$, maka:

$$(a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3}) \quad 4. \quad a \cdot b \in Q(\sqrt{3})$$

Misalkan $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3})$, maka :

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3})$$

Karena semua syarat telah terpenuhi maka $Q(\sqrt{3})$ adalah Subring dari R .

BAB IV

SIFAT GELANGGANG

Misalkan R suatu gelanggang atau ring dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian.

- Elemen identitas terhadap perkalian (jika ada) disebut elemen kesatuan dan diberi simbol u .
- Invers penjumlahan dari $a \in R$ ditulis $-a$ dan invers perkalian dari $a \in R$ (jika ada) ditulis a^{-1} .

Karena $(R, +)$ suatu Ring, maka $(R, +)$ suatu grup komutatif sehingga semua sifat yang berlaku dalam grup aditif (penjumlahan) berlaku pula dalam ring, misalnya invers dari invers $a \in R$ adalah a , ditulis $-(-a) = a \forall a \in R$.

Begitu pula $-(a + b) = (-a) + (-b), \forall a, b \in R$.

Oleh karena itu, sifat-sifat dapat digunakan dalam ring, sifat-sifat yang akan kita pelajari di sini, terutama sifat-sifat yang berkaitan dengan operasi perkalian.

Teorema 4.1

Jika R suatu Ring, maka:

- (i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \forall a \in R$
- (ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab), \forall a, b \in R$
- (iii) $(-a)(-b) = ab, \forall a, b \in R$
- (iv) $a(b - c) = ab - ac$ dan $(a - b)c = ac - ab, \forall a, b, c \in R$

Contoh 1 :

Jika $a, b, c, d \in R$ suatu Ring

maka:

$$\begin{aligned} (a - b)(c + d) &= (a - b)c + (a - b)d && \text{sifat distributif kanan} \\ &= ac - bc + ad - bd && \text{sifat distributif kiri} \end{aligned}$$

Definisi 4.1

Misalkan R suatu ring dan suatu bilangan bulat positif, maka $\forall a \in R$ berlaku:

- (i) $ma = a + a + a + \dots + a$ sebanyak m suku
- (ii) $(-m)a = m(-a) = (-a) + (-a) + \dots + (-a)$ sebanyak m suku
 $= -(a + a + a + \dots + a)$
 $= -(ma)$
- (iii) $0a = z$ (elemen nol dari Ring R)

Dari Definisi 4.1 dapat diturunkan bahwa apabila R suatu Ring, m dan n bilangan-bilangan bulat positif, maka $(m + n) a = ma + na$, $\forall a \in R$. Hal ini dibuktikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} ma + na &= (\underbrace{a + a + a + \dots + a}_m) + (\underbrace{a + a + a + \dots + a}_n) \\ &= (\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{m+n}) \\ &= (m + n) a \end{aligned}$$

Apabila m suatu bilangan bulat positif dan n suatu bilangan bulat negatif dengan $m < |n|$, berlaku $(m + n) a = ma + na$

Misalkan $n = -t$ dengan t suatu bilangan bulat positif, maka

$$\begin{aligned} ma + na &= ma + (-t) a \\ &= ma + t (-a) \\ &= (a + a + a + \dots + a) + ((-a) + (-a) + (-a) + \dots + (-a)) \\ &= (a + a + a + \dots + a) + (a + (-a)) + (\underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{t-1}) \\ &= a + a + \dots + a + (-a) + (-a) + \dots + (-a) \\ &= a + a + \dots + (a + (-a)) + (\underbrace{-a + \dots + (-a)}_{t-1}) \end{aligned}$$

Dan seterusnya, karena $m < 1$, maka

$$\begin{aligned} &= (-a) + (-a) + \dots + (-a) \\ &= (-m + t) (-a) \\ &= -(-m + t) a \\ &= (m - t) a, \end{aligned}$$

karena $-t = n$, maka

$$= (m + n) a$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa jika R suatu ring, m dan n keduanya bilangan bulat, maka $(m + n) a = ma + na$, $\forall a \in R$. Selanjutnya, jika R suatu ring, m dan n bilangan-bilangan bulat, maka $m(n.a) = (m.n).a$. Hal ini dibuktikan untuk kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dari bilangan-bilangan bulat m dan n , yaitu:

- 1) Jika keduanya positif,
- 2) Jika salah satu positif dan lainnya negatif,
- 3) Jika salah satu atau keduanya nol.

Jika m dan n keduanya bilangan positif, maka

$$\begin{aligned} m(na) &= na + na + na + \dots + na \\ &= (n + n + \dots + n) a, \text{ ingat bahwa } ma + na = (m + n) a \\ &= (mn) a \end{aligned}$$

Teorema 4.2

Jika R suatu Ring, m dan n keduanya bilangan bulat, maka

- 1) $(m + n) a = ma + na$, $\forall a \in R$
- 2) $m(a + b) = ma + mb$, $\forall a, b \in R$

$$3) m(na) = (mn)a, \forall a \in R$$

Contoh 2 :

$H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ dengan penjumlahan mod 10 dan perkalian mod 10 adalah suatu Ring.

+	0	2	4	6	8
0	0	2	4	6	8
2	2	4	6	8	0
4	4	6	8	0	2
6	6	8	0	2	4
8	8	0	2	4	6

X	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	2
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

- $(2 + 4) \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6$
 $6 \cdot 6 = 2 + 4$
 $6 = 6$
- $8 \cdot (2 + 6) = 8 \cdot 2 + 8 \cdot 6$
 $8 \cdot 8 = 6 + 8$
 $= 4$
- $0(4 \cdot 2) = (0 \cdot 4) \cdot 2$
 $0 \cdot 8 = 0 \cdot 2$
 $0 = 0$

Misalkan R suatu ring dan m suatu bilangan bulat positif, maka $\forall a \in R$ didefinisikan $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ sebanyak m faktor, karena dalam suatu ring, invers perkalian dari suatu elemen tidak perlu ada, maka a^m tidak dapat didefinisikan untuk bilangan bulat negatif m . Demikian pula, karena dalam suatu Ring, elemen kesatuan tidak perlu ada, maka a^m tidak dapat didefinisikan.

Dari definisi di atas dapat diturunkan bahwa jika R suatu Ring, sedangkan m dan n keduanya bilangan bulat positif, maka

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ dan

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in R$

Pernyataan-pernyataan ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

(i) $a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \text{ faktor}) (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ faktor})$
 $= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ faktor}}$
 $= a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m$ n faktor mengingat (1) diatas, maka
 $= a^{m+m+\dots+m}$ n suku
 $= a^{mn}$

Perhatikan bahwa apabila R suatu Ring, m suatu bilangan bulat positif dan $a \in R$, mengingat sifat tertutup terhadap perkalian, maka $a^m \in R$ pula.