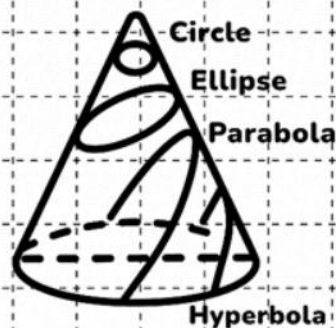


Geometri Analitik Bidang



$$y = mx + b$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

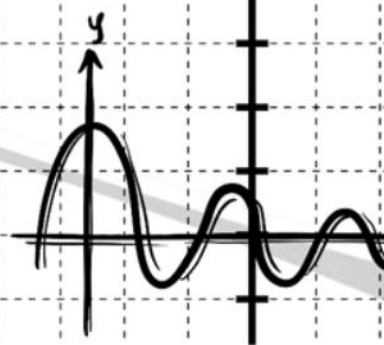
II
(-, +)

I
(+, +)

III
(-, -)

IV
(+, -)

H. Supratman
Sandy Ihsan Amarulloh
Delvin Firmansyah
Gilang Setia



GEOMETRI ANALITIK BIDANG

H. Supratman
Sandy Ihsan Amarulloh
Delvin Firmansyah
Gilang Setia



FORECASTING BISNIS

Teori dan Penerapannya

Penulis:
H. Supratman
Sandy Ihsan Amarulloh
Delvin Firmansyah
Gilang Setia

Editor:
Syifa Ismayanti

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Desember 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18 x 25cm
ISBN : -

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga buku ini dapat diselesaikan. Buku ini berjudul *Geometri Analitik Bidang*, merupakan sebuah usaha untuk menyajikan materi geometri analitik bidang secara terstruktur dan komprehensif. Geometri analitik merupakan cabang dari matematika yang memadukan konsep geometri dengan metode aljabar. Buku ini dirancang untuk membantu pembaca memahami dan menerapkan prinsip-prinsip geometri analitik dengan jelas dan sistematis.

Pembahasan dalam buku ini dimulai dari dasar-dasar seperti garis bilangan dan sistem koordinat kartesius, kemudian berlanjut ke konsep-konsep fundamental seperti vektor, jarak, dan cosinus arah. Selanjutnya, buku ini mengeksplorasi persamaan garis dan hubungan antara garis-garis dalam bidang, serta topik-topik yang lebih kompleks terkait lingkaran dan irisan kerucut. Setiap bab dirancang untuk membangun pemahaman yang kuat dan menyajikan aplikasi praktis dari teori yang dibahas. Penulis menyadari bahwa penyusunan buku ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan saran, masukan, dan dukungan selama proses penyusunan buku ini. Penulis juga berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi para pembaca, baik dalam konteks akademis maupun praktis.

Akhir kata, penulis berharap buku ini dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam pemahaman dan penguasaan geometri analitik bidang. Semoga buku ini dapat membantu para pembaca dalam mengeksplorasi keindahan dan kekayaan geometri analitik, serta memfasilitasi penerapan konsep-konsep matematika dalam berbagai bidang.

Agustus 2024, Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
BAB 1 GARIS BILANGAN DAN SISTEM KOORDINAT	1
A. Garis Bilangan	1
B. Jarak Antara Dua Titik Pada Garis Bilangan	2
C. Sistem Koordinat Kartesius	2
D. Simetri	4
 BAB 2 VEKTOR DAN KOMPONEN	 6
A. Komponen Skalar Segmen Garis Berarah	6
B. Vektor Bidang	8
C. Sudut Diantara Dua Vektor	13
D. Vektor-Vektor yang Sejajar dan Tegak Lurus	16
E. Koordinat Suatu Titik yang Membagi Segmen Dalam Perbandingan Tertentu	18
F. Titik Tengah Sebuah Segmen	22
G. Luas Daerah Segitiga dan Bar Product Dua Vektor	24
 BAB 3 JARAK DAN COSINUS ARAH	 27
A. Jarak Diantara Dua Titik	27
B. Cosinus Arah Sebuah Segmen	28
C. Bilangan Arah dan Kosinus Arah Garis Lurus	30
 BAB 4 PERSAMAAN GARIS	 34
A. Koefisien Arah Suatu Garis	34
B. Persamaan Parameter Suatu Garis	36
C. Persamaan Garis dalam Bentuk Bilangan Arah	39
D. Persamaan Linear Umum Suatu Garis	42
E. Persamaan Garis dalam Bentuk Koefisien Arah Titik	47
F. Persamaan Garis dalam Bentuk Garis Potong Sumbu	48
 BAB 5 SUDUT DAN GARIS-GARIS	 50
A. Sudut antara Dua Garis	50
B. Garis-Garis yang Berpotongan	53
C. Tiga Garis Yang Kongruen	56
D. Garis Bagi Sudut Antara Dua Garis	59
E. Himpunan Garis	61
F. Berkas Garis	63

BAB 6 LINGKARAN	67
A. Persamaan Standar Dari Lingkaran	67
B. Persamaan Umum Lingkaran	70
C. Simetri	73
D. Berkas Lingkaran	74
E. Persamaan Parameter Lingkaran	77
F. Mencari Persamaan Lingkaran Yang Memenuhi Syarat-Syarat Tertentu	79
G. Garis Singgung Terhadap Lingkaran Dari Suatu Titik Di Luar Lingkaran	81
H. Panjang Garis Singgung	84
I. Garis Kuasa	86
J. Persamaan Garis Singgung Di Suatu Titik Terhadap Lingkaran	90
K. Persamaan Garis Singgung Terhadap Suatu Lingkaran Yang Diketahui Arahnya	92
 BAB 7 IRISAN KERUCUT	 95
A. Pendahuluan	95
B. Definisi Umum Irisan Kerucut (Secara Analisis)	99
C. Melukis Parabola	100
D. Persamaan Parabola	102
E. Persamaan Sederhana Ellips	107
F. Jari-jari Fokus	111
G. Latus Rectum	111
H. Parameter Persamaan Ellips	113
I. Persamaan Sederhana Hiperbola	113
J. Asimtot Hiperbola	120
K. Hiperbola Sekawan	124
L. Persamaan Parameter Hiperbola	126

BIOGRAFI PENULIS

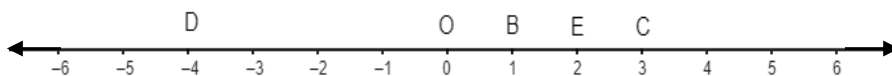
ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

BAB 1

GARIS BILANGAN DAN SISTEM KOORDINAT

A. Garis Bilangan

Untuk menentukan letak suatu titik pada garis, maka terlebih dahulu membuat skala bilangan. Garis ini biasanya digunakan untuk menunjukkan posisi bilangan bulat, bilangan pecahan, atau bilangan desimal dalam urutan tertentu. Bilangan positif ditempatkan di sebelah kanan dari titik nol, sedangkan bilangan negatif berada di sebelah kiri.



Gambar 1.1

Skala garis bilangan pada gambar diatas ditentukan sebagai berikut:

1. Titik 0 sebagai titik pangkal atau titik pusat
2. Untuk menentukan sebuah titik misal titik A, maka panjang segmen OA sebagai satu satuan Panjang
3. Untuk menentukan arah positif dapat ditinjau dari sebelah kanan titik 0 (titik pangkal). Sebaliknya untuk menentukan arah negatif dapat ditinjau dari sebelah kiri titik pangkal. Misal arah negatif dari sebelah kiri titik 0, jadi bila pada titik 0 dibubuhi angka nol, maka pada titik C kita bubuhi -1 . Misal arah positif dari sebelah titik 0, jadi bila pada titik 0 dibubuhi angka nol maka pada titik B kita bubuhi $+1$ atau 1

Cara menyatakan titik Dari gambar 1.1 diatas, yaitu:

- Titik 0 berkoordinat 0 dinyatakan O (0)
- Titik A berkoordinat $+1$ dinyatakan A (1)
- Titik B berkoordinat $+2$ dinyatakan B (2)

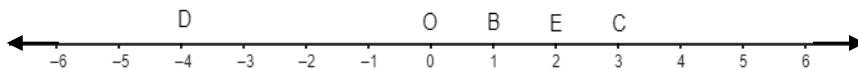
Jadi untuk setiap bilangan real ada tepat satu titik pada garis x . Bilangan-bilangan yang terdapat pada setiap titik di garis x disebut koordinat titik, dan himpunan titik pada garis x dengan himpunan bilangan-bilangan real disebut garis bilangan.

B. Jarak Antara Dua Titik Pada Garis Bilangan

Jarak dua buah titik dapat dihitung apabila kedua titik tersebut di ketahui kordinat-koordinatnya. Jarak dua buah titik tersebut tidak diberi tanda positif atau negatif tetapi diambil harga mutlaknya.

$$|x| = x \text{ bila } x > 0$$

$$|x| = -x \text{ bila } x < 0$$



Gambar 1.2

Misalnya Jarak antara titik A dan C, diberi lambang $|AC| = |(+3) - (+1)| = 4$, kemudian $|DA| = |(+1) - (-4)| = 5$ dan $|AC| = |(+1) - (-5)| = 6$.

Maka dari penjelasan diatas, secara umum untuk menentukan jarak dua buah titik yang diketahui koordinatnya dapat digunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Andaikan } A(x_1) \text{ dan } B(x_2), \text{ maka jarak } AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Selain dari penjelasan diatas, ada juga yang dinamakan dengan jarak berarah. Jarak berarah antara dua titik, misalnya jarak berarah antara titik A dengan titik C, didefinisikan sebagai berikut:

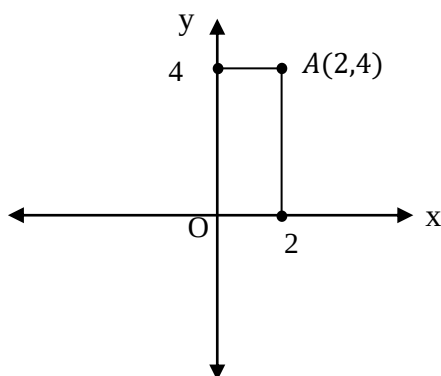
$$\overrightarrow{AB} = x_B - x_A \text{ dan } \overrightarrow{BA} = x_A - x_B$$

Jadi dari gambar 1.2 diketahui jarak berarah $DA = x_A - x_D = (+1) - (-4) = 5$ dan jarak berarah $AD = (-4) - (+1) = -5$.

C. Sistem Koordinat Kartesius

Untuk menentukan letak suatu titik pada bidang datar garis bilangan dapat diperluas untuk menentukan letaknya. Untuk ini dipilih dalam bidang datar 2 garis lurus yang berpotongan. Suatu sistem koordinat tegak lurus di dalam bidang ditentukan dengan memilih suatu satuan panjang serta dua buah garis lurus yang masing-masingnya saling tegak lurus dan berpotongan di satu titik. Titik potongnya disebut titik asal titik pangkal. Kedua garis tersebut sumbu-sumbu koordinat dan sudut anantara kedua garis disebut sudut koordinat.

Sebuah titik di bidang, biasanya dinyatakan dengan pasangan berurutan (x, y) . Bilangan x pada (x, y) dinamakan absis yang menyatakan jarak titik (x, y) ke sumbu y , dan bilangan y menyatakan jarak titik (x, y) ke sumbu.

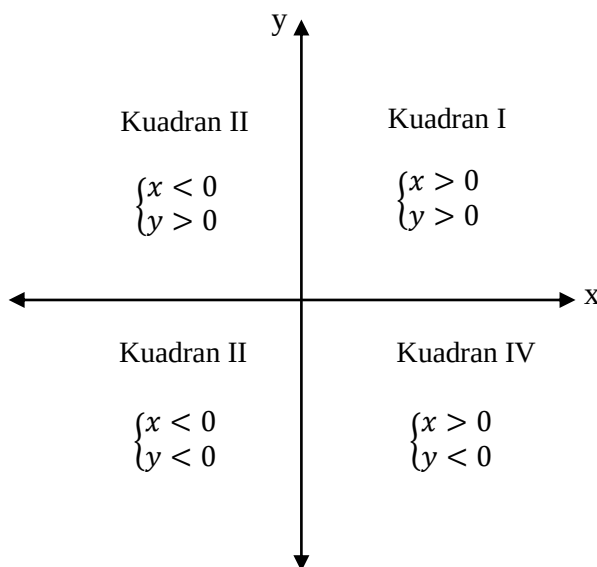


Gambar 1.3

Misalkan suatu titik A di bidang di tulis $A(x, y)$. Bilangan x pada $A(x, y)$ disebut **absis** titik A yang menyatakan jarak titik $A(x, y)$ terhadap sumbu x . Bilangan y pada $A(x, y)$ disebut **ordinat** titik A yang menyatakan jarak titik $A(x, y)$ terhadap sumbu Y . Koordinat-koordinat titik A adalah pasangan bilangan terurut $A(x, y)$. Sumbu-sumbu datar dan tegak membagi bidang datar menjadi 4 bagian/daerah yang masing-masing disebut kuadran.

Sebuah titik $A(x, y)$ terletak pada:

- Kuadran I : Jika absis $x > 0$, dan ordinat $y > 0$, atau $\{A(x, y) | x > 0, y > 0\}$
- Kuadran II: Jika absis $x < 0$, dan ordinat $y > 0$, atau $\{A(x, y) | x < 0, y > 0\}$
- Kuadran III: Jika absis $x \leq 0$, dan ordinat $y < 0$, atau $\{A(x, y) | x < 0, y < 0\}$
- Kuadran IV : Jika absis $x \leq 0$, dan ordinat $y < 0$, atau $\{A(x, y) | x > 0, y < 0\}$



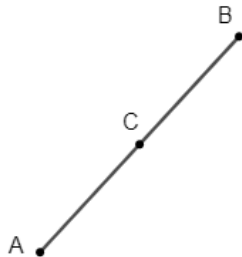
Gambar 1.4

Latihan Soal

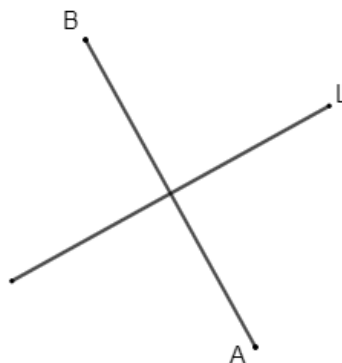
1. Berilah penjelasan dari istilah berikut:
 - a. Garis bilangan
 - b. Absis
 - c. Ordinat
 - d. Koordinat suatu titik
 - e. Nama suatu titik
2. Plot dua buah titik yang masing-masing berada di kuadran I dan kuadran III.
3. Tentukanlah Lokasi atau letak dari titik $(-3,1)$, $(3,0)$, $(4,1)$, $(-2,-3)$, dan $(5,-3)$.
4. Berapakah luas segiempat jika diketahui titik-titik puncak $(5,3)$, $(5,-1)$, $(0,3)$, $(0,-1)$?

D. Simetri

Dua titik A dan B dikatakan simetri terhadap titik C, dengan C adalah titik tengah segmen garis yang menghubungkan titik A dan B. titik A dan B disebut bayang-bayang yang saling simetri terhadap titik C. sedangkan titik C disebut pusat simetri untuk kedua titik tersebut.



Gambar 1.5

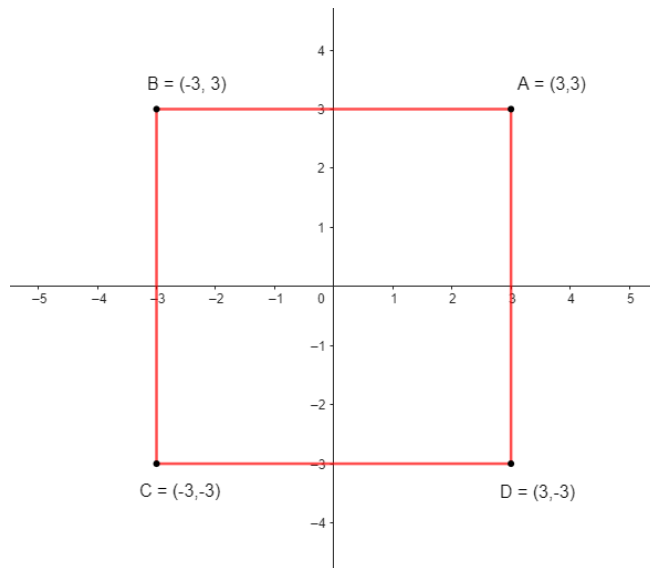


Gambar 1.6

Dua titik A dan B pada gambar diatas dikatakan simetri terhadap garis l , dengan l adalah garis tegak lurus yang membagi dua sama Panjang segmen garis AB. Titik A dan B disebut bayang-bayangan yang saling simetri terhadap garis l . Garis l disebut sumbu simetri dari titik A dan B.

Contoh: Carilah koordinat-koordinat titik yang simetri dengan titik $(3,3)$ terhadap titik pangkal, sumbu X dan sumbu Y !

Penyelesaian:



Gambar 1.7

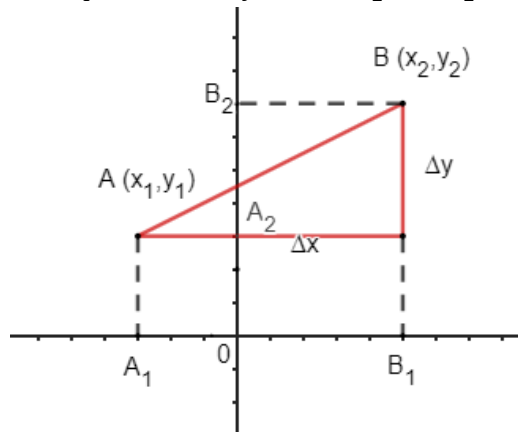
Untuk menentukan titik $(3,3)$ simetri terhadap titik pangkal, diperoleh titik $(-3, -3)$. Titik $(3,3)$ simetri terhadap sumbu X dengan $(3, -3)$. Selanjutnya titik $(3,3)$ simetri terhadap sumbu Y dengan $(-3, 3)$.

BAB 2

VEKTOR DAN KOMPONEN

A. Komponen Skalar Segmen Garis Berarah

Komponen skalar dari segmen garis berarah adalah jarak berarah dari proyeksi AB berurut-turut pada sumbu $x(A_1B_1)$ dan sumbu $y(A_2B_2)$. Perhatikan $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah dua titik sembarang yang terletak pada bidang. Proyeksi A dan B pada sumbu x adalah titik A_1 dan B_1 , dan proyeksi A dan B pada sumbu y adalah A_2 dan B_2 ,



Gambar 2.1

$$\overline{A_1B_1} = x_2 - x_1$$

$$\overline{A_2B_2} = y_2 - y_1$$

Berarti komponen skalar dari segmen garis berarah yaitu:

$$AB = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Bila $x_2 - x_1$ dan $y_2 - y_1$ disebut berturut-turut Δx dan Δy .

$$\text{Maka komponen skalar } AB = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = [\Delta x, \Delta y]$$

Contoh:

Tentukan komponen skalar segmen garis berarah dari $A(-2, 3)$ ke $B(5, -1)$.

$$\Delta x = \overline{EF}$$

$$\Delta y = \overline{CD}$$

$$\Delta x = 5 - (-2) = 7$$

$$\Delta y = -1 - 3 = -4$$

$$\text{Jadi komponen skalar dari } AB = [7, -4] \text{ atau } AB = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lalu jika ditanyakan komponen skalar segmen garis berarah BA , maka

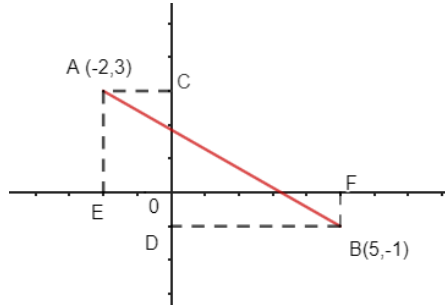
$$\Delta x = FE$$

$$\Delta y = DC$$

$$\Delta x = (-2) - 5 = -7$$

$$\Delta y = 3 - (-1) = 4$$

Jadi komponen skalar dari $BA = [-7, 4]$



Gambar 2.2

Contoh:

Jika diketahui $P_1 = (7, 5)$ dan komponen skalar segmen P_1P_2 adalah $(-4, 3)$.

Tentukan koordinat titik P_2 dan buatlah sketsanya!

Penyelesaian:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$x_2 = 7 + (-4)$$

$$x_2 = 3$$

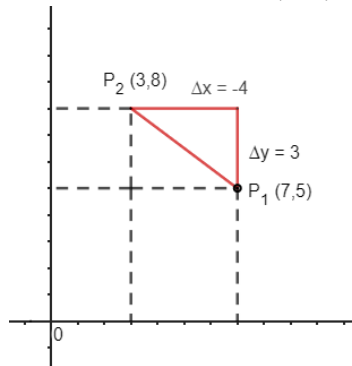
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$y_2 = 5 + 3$$

$$y_2 = 8$$

Jadi koordinat titik yang dimaksud adalah $P_2(3, 8)$



Gambar 2.3

Latihan Soal

1. Carilah komponen skalar dari tiap garis berikut ini:
 - a. $P_1 = (3, 5)$ ke persamaan $P_2 = (2, -5)$
 - b. $P_1 = (4, 6)$ ke persamaan $P_2 = (-2, 5)$
 - c. $P_1 = (-4, -2)$ ke persamaan $P_2 = (4, -2)$
2. Dari tiap soal diatas, berapakah komponen skalar segmen garis dari P_2 ke P_1 ?
3. Tentukan titik awal dari tiap segmen berikut jika diketahui titik akhir dan komponen-komponen skalarnya, sebagai berikut:
 - a. $(-4, -1), (2, -3)$
 - b. $(2, -4), (-5, 2)$
 - c. $(3, -6), (2, -4)$
4. Diketahui $P_1 = (2, -4)$ dan komponen skalar segmen P_1P_2 adalah $(-3, 1)$, carilah koordinat titik P_2 dan buatlah sketsanya.

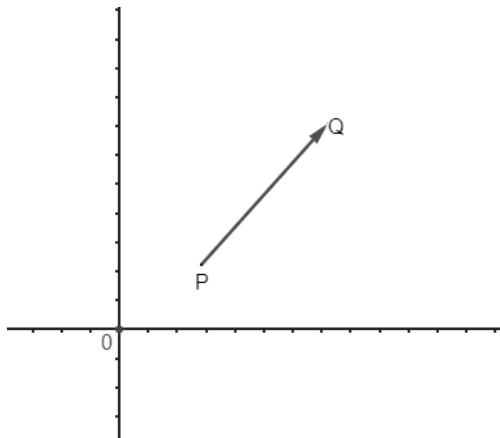
B. Vektor Bidang

Vektor adalah besaran yang memiliki besar dan arah, misalnya kecepatan, percepatan, gaya, momentum, momen, impuls, medan, magnetik dan sebagainya.

Terdapat beberapa notasi yang menyatakan suatu Vektor:

1. Ditulis dengan huruf kecil dan dicetak tebal
2. Ditulis dengan huruf kecil yang di atasnya dibubuhi tanda panah.
3. Vektor dapat dinyatakan dalam dua dimensi bahkan tiga dimensi atau lebih.

Perhatikan gambar dibawah ini.



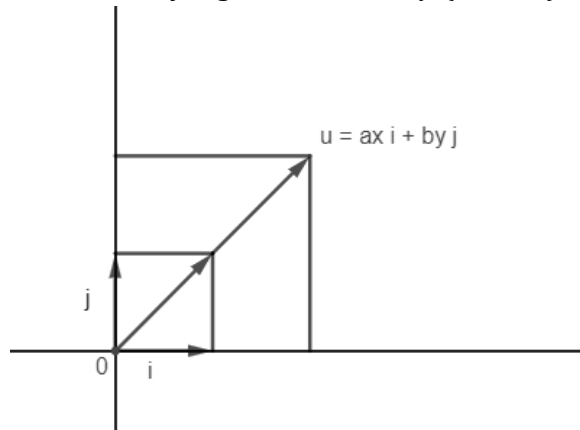
Gambar 2.4

Segmen garis berarah PQ mempunyai titik awal P dan titik akhir Q . Segmen garis berarah pada bidang ini disebut vektor (vektor bidang). Maka dapat dikatakan bahwasannya vektor adalah himpunan segmen-segmen garis yang terletak pada bidang yang mempunyai besar dan arah yang sama.

Pada vektor bidang terdapat komponen yang dinamakan dengan vektor satuan, yaitu vektor yang besarnya satu satuan dan arahnya sesuai dengan sumbu utama, yaitu:

i adalah vektor satuan yang searah sumbu x (absis)

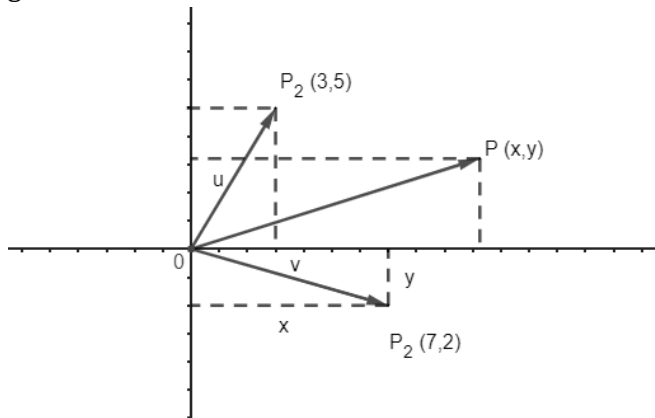
j adalah vektor satuan yang searah sumbu y (ordinat)



Gambar 2.5

Seandainya titik awal dari suatu vektor berimpit dengan titik pangkal koordinat, sedangkan titik ujungnya dimisalkan titik $P(x, y)$, maka vektor $OP = (x, y)$. Vektor ini disebut vektor posisi.

Perhatikan gambar dibawah ini!



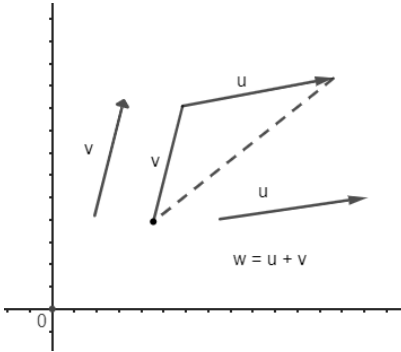
Gambar 2.6

Dari gambar diatas terdapat dua vektor posisi, yaitu titik $P_1(3,5)$ dengan $\overrightarrow{OP_1} = (3,5)$, dan untuk suatu titik $P_2(7,2)$ dengan $\overrightarrow{OP_2} = (7,2)$. Jumlah dua vektor didapat dengan cara menjumlahkan komponen-komponen skalar.

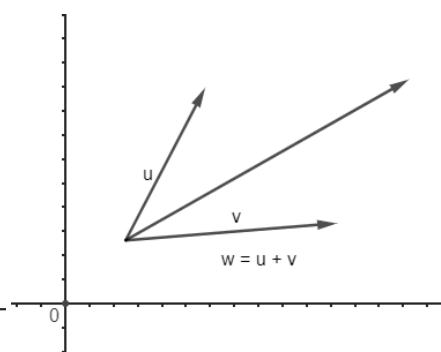
Jika $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ maka jumlah dari u dan v adalah vektor w dengan:

$$\underline{w} = \underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Berikut merupakan penjumlahan vektor menurut kaidah sagitiga, dan penjumlahan vektor menurut kaidah jajaran genjang.



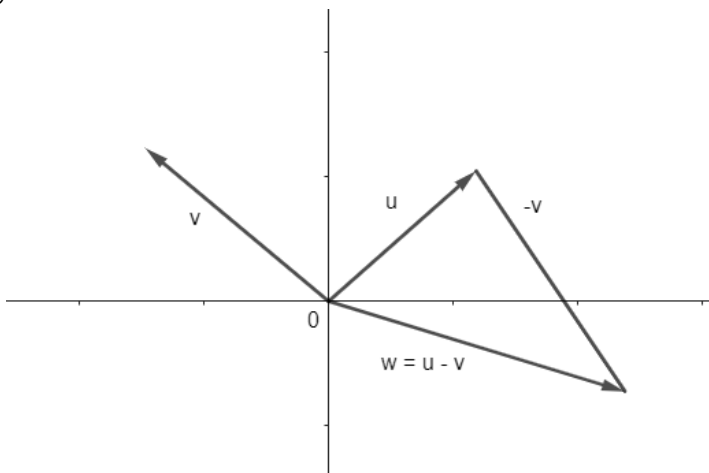
Gambar 2.7



Gambar 2.8

Jika vektor $\underline{u} = (u_1, u_2)$, maka vektor $-\underline{u} = (-u_1, -u_2)$ merupakan negarif dari vektor $\underline{u}$. Negative dari suatu vektor mempunyai besar yang sama, akan tetapi arah berlawanan.

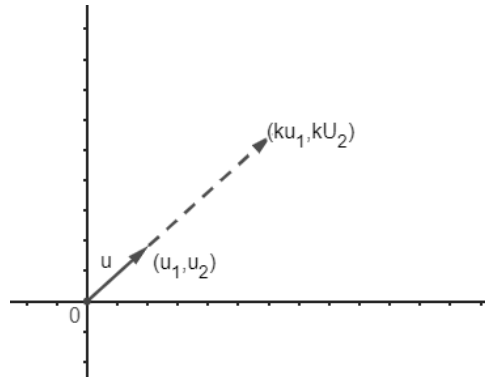
Contohnya:



Gambar 2.9

Perkalian dengan vektor skalar k :

Jika terdapat vektor $\underline{u}$ dan k sembarang skalar (bilangan real), maka penulisan $k(u_1, u_2)$ adalah suatu vektor (ku_1, ku_2) . Jika k positif, maka vektor yang baru mempunyai arah yang sama dengan vektor semula dan besarnya k kali vektor $\underline{u}$. Jika k negative maka vektor yang baru mempunyai arah yang berlawanan dengan vektor semula, sedangkan besarnya menjadi k kali vektor semula.



Gambar 2.10

Selain vektor berarah diatas terdapat juga vektor $0 = (0,0)$ yang disebut vektor nol. Vektor nol tidak mempunyai arah, karena titik awal dan titik ujungnya saling berimpit. Begitupun jika suatu vektor dikurangi dengan vektor yang sama maka itu juga disebut dengan vektor 0 atau $0 = \underline{u} - \underline{u}$.

Cosinus arah pada vektor didefinisikan sebagai cosinus arah dari segmen yang mewakili vektor tersebut. Oleh karena itu cosinus arah dari vektor satuan adalah komponen-komponennya sedangkan vektor nol tidak mempunyai cosinus arah.

Untuk $\underline{u} = (u_1, u_2)$

$$\underline{U} = (u_1, u_2) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \left[\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right] = |\underline{U}| \cdot \left[\frac{u_1}{|\underline{u}|}, \frac{u_2}{|\underline{u}|} \right].$$

Dengan $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ merupakan besar dari $\underline{U}$, $\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$ dan $\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$ adalah cosinus-cosinus arah dari $\underline{U}$, serta $\frac{u_1}{|\underline{u}|}$ dan $\frac{u_2}{|\underline{u}|}$ merupakan vektor satuan.

Catatan: vektor nol adalah nol kali vektor dan setiap vektor $\underline{U}$ yang bukan vektor nol, cosinus-cosinus arahnya adalah komponen-komponen skalar dari vektor satuan.

Contoh:

Carilah penjumlahan dan pengurangan vektor $\underline{U} = (-3, 2)$ dan $\underline{V} = (4, -1)$.

Penyelesaian:

$$W = U + V = [4 + (-3), 2 + (-1)] = (1, 1)$$

$$Q = U - V = [-3 - 4, 2 - (-1)] = (-7, 3)$$

Contoh:

Diketahui vektor $U = (-2, 4)$ adalah perkalian konstanta dengan arah vektor satuan yang arahnya sama dengan arah vektor $\underline{U}$, carilah cosinus-cosinus arah vektor tersebut.

Penyelesaian:

$$U = (-2, 4) \text{ maka } |U| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vektor satuan: } \frac{-2}{2\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{dan } \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

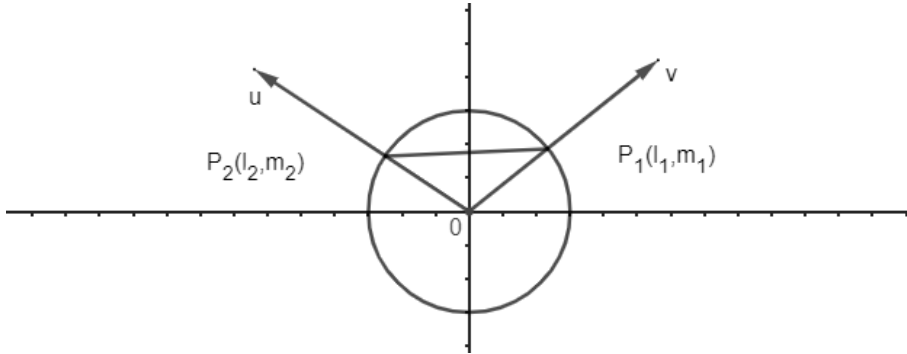
Dengan $U = 2\sqrt{5} \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$, dan cosinus-cosinus arah dari $\underline{U}$ adalah $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ dan $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Latihan Soal

1. Gambarkan titik $U(3, -6)$!
2. Apakah vektor $(4, -6)$ sama dengan vektor $(-4, 6)$? Jelaskan!
3. Carilah penjumlahan dan pengurangan dari beberapa vektor berikut!
 - a. $(3, 5)$ dan $(-2, 4)$
 - b. $(5, -6)$ dan $(7, -3)$
 - c. $(4, -4)$ dan $(-3, -9)$
4. Carilah cosinus arah dari vektor-vektor berikut ini!
 - a. $(2, 3)$
 - b. $(7, -5)$
 - c. $(-3, -9)$
5. Diketahui $\underline{u} = (-2, 3)$, $\underline{v} = (4, 1)$, dan $\underline{w} = (-3, 6)$
 - a. $u + 3v$
 - b. $w - 2u$
 - c. $3w - u + 2v$

C. Sudut Diantara Dua Vektor

Perhatikan sebuah lingkaran yang berpusat di titik pangkal dan berjari-jari satu satuan yang disebut lingkaran satuan, sedangkan vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah dua vektor yang tidak nol. l_1 dan m_1 adalah cosinus-cosinus arah dari vektor u , dan l_2 dan m_2 adalah cosinus-cosinus arah dari vektor v . Kedua vektor ini mempunyai titik awal yang berimpit dengan titik pangkal. Titik potong vektor u dengan lingkaran satuan adalah $P_1(l_1, m_1)$ dan titik potong vektor v dengan lingkaran satuan adalah $P_2(l_2, m_2)$.



Gambar 2.11

Menurut dalil cosinus

$$|P_1P_2|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2|OP_1||OP_2| \cos \theta$$

Karena: $|OP_1| = |OP_2| = 1$

$$|P_1P_2|^2 = 1 + 1 - 2 \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

Tetapi: $|P_1P_2| = (L_2 - L_1)^2 + (m_2 - m_1)^2$

Didapatkan: $2 \cos \theta = 2 - [(L_2 - L_1)^2 + (m_2 - m_1)^2]$

$$= 2 - [l_2^2 - 2l_1l_2 + l_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2]$$

Karena $l_1^2 + m_1^2 = 1$ dan $l_2^2 + m_2^2 = 1$

$$2 \cos \theta = 2 - 2 + 2(l_1l_2 + m_1m_2)$$

Atau

$$\cos \theta = l_1l_2 + m_1m_2$$

Jadi perkalian titik antara dua vektor adalah sama dengan jumlah perkalian dari cosinus-cosinus arah kedua vektor tersebut jika $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ maka:

$$l_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \text{ dan } m_1 = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

$$l_2 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \text{ dan } m_2 = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\text{Jadi } \cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|u| \cdot |v|}$$

$$\text{Karena } |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \text{ dan } |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Didapat:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

Kombinasi dari bentuk $u_1 v_1 + u_2 v_2$ diberi nama dengan notasi yang khusus, yaitu sebagai produk skalar atau produk simetri atau dot produk (= *perkalian titik*), dan diberi lambing $u \cdot v$. Maka perkalian titik adalah:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Jadi perkalian titik diantara dua vektor adalah sama dengan jumlah perkalian komponen-komponen yang berpasangan dari kedua vektor tersebut.

Sekarang kita perhatikan bahwa:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

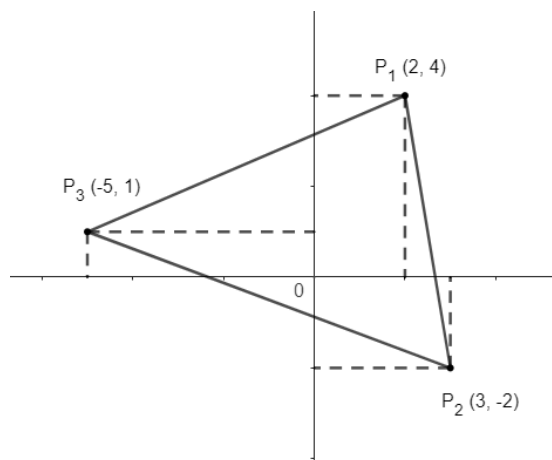
- Jika θ sudut lancip, $\cos \theta$ adalah positif, karena $u \cdot v$ positif.
- Jika θ sudut tumpul, $\cos \theta$ adalah negatif, karena $u \cdot v$ negatif.

Demikian pula sebaliknya, jika $u \cdot v$ positif $\cos \theta$ adalah positif dan θ adalah lancip. Sedangkan jika $u \cdot v$ negatif $\cos \theta$ adalah negatif dan θ adalah tumpul.

Contoh:

Carilah cosinus sudut dari segitiga dengan titik puncak $P_1(2, 4)$, $P_2(3, -2)$, dan $P_3(-5, 1)$.

Penyelesaian:



Gambar 2.12

Jika vektor-vektor yang terbentuk berpotongan di titik puncak P_1 , maka $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -6)$ dan $\overrightarrow{P_1P_3} = (-7, -3)$

Berarti,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ \cos < P_2P_1P_3 &= \frac{1 \cdot (-7) + (-6) \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{-7 + 18}{\sqrt{1 + 49} \cdot \sqrt{36 + 9}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{45}} = \frac{11}{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{11}{15\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}\end{aligned}$$

untuk segmen-segmen yang berpotongan di titik P_2 maka $\overrightarrow{P_2P_1} = (-1, 6)$

Dan $\overrightarrow{P_2P_3} = (-8, 3)$.

Berarti,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ \cos < P_1P_2P_3 &= \frac{8 + 18}{\sqrt{(-1)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{1 + 36} \cdot \sqrt{64 + 9}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{73}}\end{aligned}$$

Untuk yang terakhir, $\overrightarrow{P_3P_1} = (7, 3)$ dan $\overrightarrow{P_3P_2} = (8, -3)$

Berarti

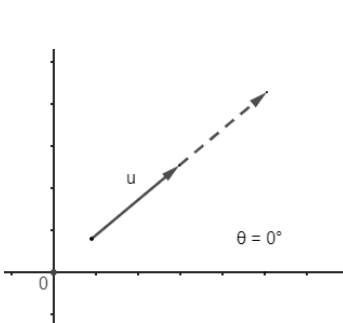
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ \cos < P_1P_2P_3 &= \frac{7 \cdot 8 + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + 3^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{56 - 9}{\sqrt{49 + 9} \cdot \sqrt{64 + 9}} \\ &= \frac{47}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{73}}\end{aligned}$$

Latihan Soal

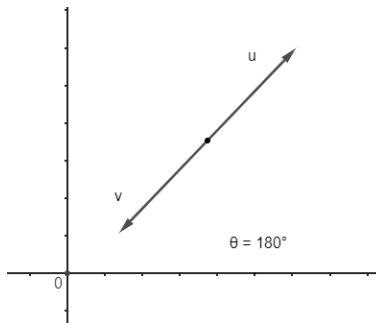
1. Diketahui titik $A(3, 4)$, $B(-1, -2)$, dan $C(2, -3)$. Tentukan sudut antara vektor AB dan vektor AC .
2. Diketahui titik $A(2, 2)$, $B(-2, 3)$, dan $C(1, -1)$. Tentukan sudut antara vektor AB dan vektor AC .
3. Diketahui titik $X(2, 3)$, $Y(-1, 4)$, dan $Z(3, -2)$. Hitung sudut antara vektor XY dan XZ . Diskusikan apakah ketiga titik X, Y , dan Z membentuk segitiga sembarang atau spesifik.
4. Diketahui titik $A(3, -1)$, $B(0, 4)$ dan $C(6, 2)$. Temukan sudut antara vektor AB dan vektor AC . Apakah vektor-vektor ini membentuk sudut yang lebih besar dari 90° ?
5. Diketahui titik $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$, $R(-2, 3)$ dan $S(1, -1)$. Hitunglah sudut antara vektor PQ dan vektor PR . Hitung juga sudut antara vektor PS dan vektor QR . Bandingkan hasilnya.

D. Vektor-Vektor yang Sejajar dan Tegak Lurus

Dua vektor yang tidak nol sejajar dalam arah yang sama jika sudut diantara keduanya adalah 0° , dan kedua vektor itu sejajar dalam arah yang berlawanan jika sudut diantara keduanya adalah 180° . Dan jika kedua vektor itu sejajar dalam arah yang sama atau berlawanan, maka kedua vektor itu disebut sejajar. Dua vektor adalah sejajar dalam arah yang sama, jika sinus-cosinus arahnya sama. berarti jika u dan v vektor yang sejajar dalam arah yang sama, dan jika l_1 dan m_1 , dan l_2 dan m_2 adalah cosinus-cosinus arah dari u dan v , maka $l_1 = l_2$ dan $m_1 = m_2$. Sehingga disini, $l_1 l_2 + m_1 m_2 = \cos 0^\circ = 1$. Jika kedua vektor itu sejajar dalam arah yang berlawanan maka $l_1 = -l_2$ dan $m_1 = -m_2$. Sekarang $l_1 l_2 + m_1 m_2 = \cos 180^\circ = -1$.



Gambar 2.13



Gambar 2.14

Dua vektor sejajar jika cosinus-cosinus arah sebuah vektor dapat ditentukan dari komponen-komponen skalarnya, dengan komponen skalar yang berpasangan adalah sebanding. Dengan catatan:

- Jika perbandingan komponen skalar adalah positif, maka kedua vektor tersebut sejajar dalam arah yang sama.
- Jika perbandingan komponen skalar adalah negatif, maka kedua vektor tersebut sejajar dalam arah yang berlawanan.

Dalam hal ini, $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$, maka u sejajar v jika,

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Catatan:

Persamaan terpenuhi jika dan hanya jika v_1 dan v_2 tidak nol, jika $v_1 = 0$, maka $v_2 \neq 0$ dan jika $u_1 = 0$, maka $u_2 \neq 0$. Sedangkan persamaan tidak terdefinisi jika dan hanya jika $v_1 = v_2 = 0$, maka $v = (0, 0)$. Dua vektor saling tegak lurus, maka dua diantara keduanya adalah 90° . Jadi, $\cos \theta = 0$ dan $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$ dengan $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos \theta$

Jadi u dan v saling tegak lurus jika,

$$u \cdot v = 0$$

Jadi, dua vektor saling tegak lurus jika dan hanya jika jumlah perkalian diantara komponen-komponen skalar yang sebanding adalah nol.

Contoh:

Carilah koordinat titik keempat dari jajaran genjang jika diketahui $A(6,3)$, $B(2,3)$, dan $C(7,5)$!

Penyelesaian:

Segmen berarah AB dan DC sejajar dalam arah yang sama. Berarti,

$$AB = CD \text{ atau } (2 - 6, 3 - 3) = (x - 7, y - 5)$$

$$(-4, 0) = (x - 7, y - 5)$$

$$\text{Maka, } x - 7 = -4$$

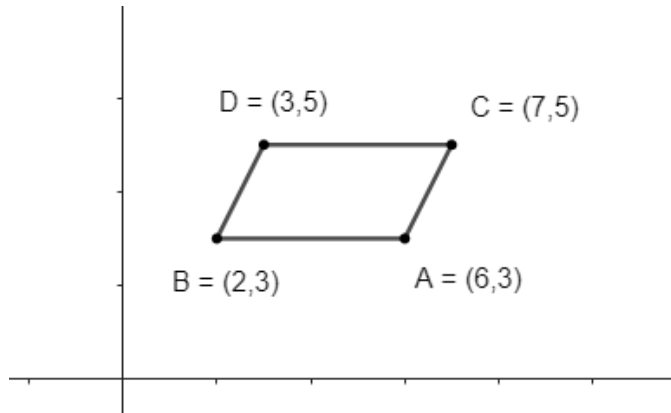
$$x = -4 + 7$$

$$x = 3, \text{ dan}$$

$$y - 5 = 0$$

$$y = 5$$

Jadi koordinat titik puncak yang keempat adalah $D(3, 5)$.



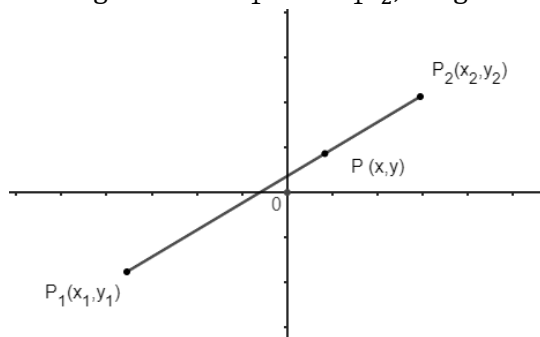
Gambar 2.15

Latihan Soal

1. Carilah nilai k jika dibentuk oleh titik $(1, 3)$ dan $(2, k)$ adalah tegak lurus terhadap segmen dengan kordinat $(-3, 1)$ dan $(5, 6)$.
2. Buktikan secara analitik bahwa diagonal-diagonal suatu bujur sangkar adalah saling tgak lurus satu sama lainnya.
3. Carilah nilai a , jika titik-titik $(5, 0)$, $(a, 4)$ dan $(-4, 3)$ titik puncak segitiga siku-siku
4. Jika dua vektor u dan v sejajar, perlihatkan bahwa ada suatu bilangan k , sehingga $u = kv$.

E. Koordinat Suatu Titik yang Membagi Segmen Dalam Perbandingan Tertentu

Misalkan kita memiliki dua titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ di bidang dua dimensi. Jika suatu titik $P(x, y)$ membagi segmen garis AB dalam perbandingan $m:n$, maka koordinat titik P dapat dihitung. Sehingga mempunyai perbandingan bahwa $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{P_1P_2}$, dengan k bilangan tertentu.



Gambar 2.16

Diketahui bahwa $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{P_1P_2}$,

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\Delta x, \Delta y)$$

Maka,

$$(x - x_1, y - y_1) = k(\Delta x, \Delta y) = (k\Delta x, k\Delta y)$$

$$x - x_1 = k\Delta x$$

$$x = x_1 + k\Delta x, \text{ atau}$$

$$y - y_1 = k\Delta y$$

$$y = y_1 + k\Delta y$$

Catatan:

- Jika $k = 0$, maka $P = P_1$
- Jika $k = 1$, maka $P = P_2$
- Jika $0 < k < 1$, maka P terletak diantara P_1 dan P_2
- Jika $k > 1$, maka P terletak disebelah P_2 pada P_1P_2
- Jika $k < 0$, maka P terletak pada setengah garis yang melalui P_1 tidak memuat P_2 pada P_1P_2 , yang berarti bahwa P_1P memiliki arah yang berlawanan.

Contoh:

Carilah koordinat titik P jika $\overrightarrow{P_1P} = \frac{4}{5}\overrightarrow{P_1P_2}$ dengan $P_1 = (-4, 1)$ dan $P_2 = (3, -2)$.

Penyelesaian:

Diketahui,

$$k = \frac{4}{5}$$

$$\overrightarrow{P_1P} = (x + 4, y - 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - (-4), (-2) - 1) = (7, -3), \text{ berarti } \Delta x = 7 \text{ dan } \Delta y = -3$$

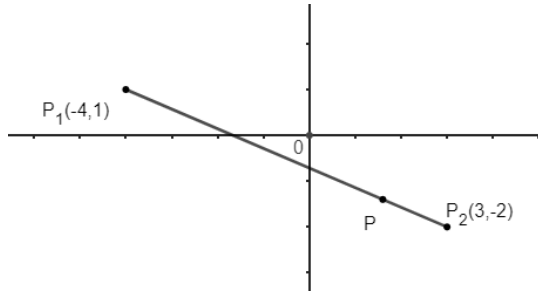
Maka,

$$x - x_1 = k\Delta x \Rightarrow x + 4 = \frac{4}{5}(7)$$

$$y - y_1 = k\Delta y \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{5}(-3)$$

$$x = \frac{8}{5} \text{ dan } y = -\frac{7}{5}$$

Jadi koordinat titik $P = (\frac{8}{5}, -\frac{7}{5})$



Gambar 2.17

Perbandingan $\overrightarrow{P_1P}$ ke $\overrightarrow{PP_2}$, atau perbandingan titik P yang membagi segmen P_1P_2 adalah sebagai berikut:

$$P_1P = (x - x_1, y - y_1) \quad \text{dan} \quad PP_2 = (x_2 - x, y_2 - y)$$

Maka,

$$\begin{aligned} (x - x_1, y - y_1) &= r(x_2 - x, y_2 - y) \\ &= (r(x_2 - x), r(y_2 - y)) \end{aligned}$$

Jadi koordinat x dan y adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{dan} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Catatan:

- Jika $r = 0$, maka $P = P_1$.
- Jika $r > 0$, maka P terletak pada segmen.
- Jika $r < 0$, maka P terletak di luar segmen.

Contoh:

Carilah koordinat titik P yang membagi segmen dari $P_1 = (-4, 2)$ ke $P_2 = (3, 3)$ dengan perbandingan 3 : 1

Penyelesaian:

Diketahui,

$$\overrightarrow{P_1P} = (x + 4, y - 2) \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{PP_2} = (3 - x, 3 - y)$$

$$\text{Untuk,} \quad \overrightarrow{P_1P} = 3\overrightarrow{PP_2}$$

$$(x + 4, y - 2) = 3(3 - x, 3 - y)$$

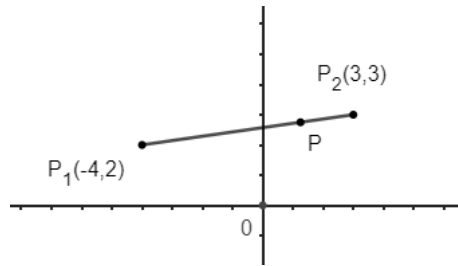
$$(x + 4, y - 2) = (9 - 3x, 9 - 3y)$$

$$\text{Maka: } x + 4 = 9 - 3x \text{ dan } y - 2 = 9 - 3y$$

Didapatkan untuk x dan y yaitu:

$$x = \frac{5}{4} \text{ dan } y = \frac{11}{4}$$

Jadi koordinat titik $P = (\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$



Gambar 2.18

Contoh:

Carilah koordinat titik P yang terletak pada garis yang melalui $P_1 = (-2, -4)$ dan $P_2 = (5, -3)$, dengan $2|P_1P| = |PP_2|$.

Penyelesaian:

Diketahui,

$$\overrightarrow{P_1P} = (x + 2, y + 4) \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{PP_2} = (5 - x, (-3) - y)$$

- Kemungkinan ke-satu:

Untuk, $2\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{PP_2}$

$$2(x + 2, y + 4) = (5 - x, (-3) - y)$$

$$(2x + 4, 2y + 8) = (5 - x, (-3) - y)$$

Maka: $2x + 4 = 5 - x$ dan $2y + 8 = (-3) - y$

Didapatkan untuk x dan y yaitu:

$$x = \frac{1}{3} \text{ dan } y = -\frac{11}{3}$$

Jadi koordinat titik $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

- Kemungkinan ke-dua:

Dengan P' dimisalkan sebagai koordinat titik yang mempunyai arah yang berlawanan, maka $P' = (x', y')$.

Untuk, $2\overrightarrow{P_1P'} = -\overrightarrow{P'P_2}$

$$2x' + 4, 2y' + 8) = -(5 - x', (-3) - y')$$

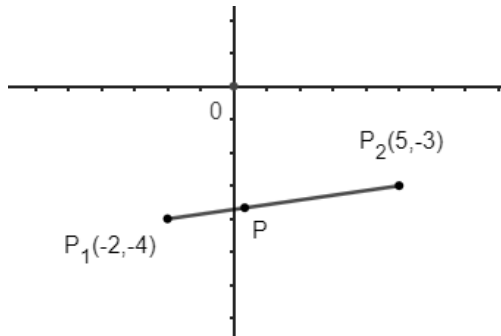
$$(2x' + 4, 2y' + 8) = (-5 + x', 3 + y')$$

Maka: $2x' + 4 = -5 + x'$ dan $2y' + 8 = 3 + y'$

Didapatkan untuk x dan y yaitu:

$$x' = -9 \text{ dan } y' = -5$$

Jadi koordinat titik $P' = (-9, -5)$



Gambar 2.19

F. Titik Tengah Sebuah Segmen

Titik tengah dari sebuah segmen garis adalah titik yang membagi segmen tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang. Titik ini terletak di tengah-tengah segmen garis dan merupakan titik yang equidistant dari kedua ujung segmen garis. Jika P titik segmen P_1P_2 , maka $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{PP_2}$.

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1)$$

$$\overrightarrow{PP_2} = (x_2 - x, y_2 - y)$$

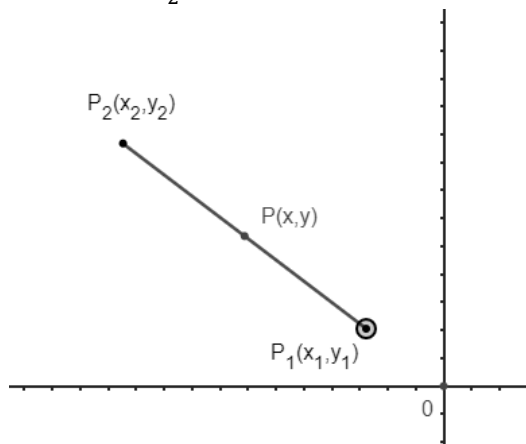
Maka, $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{PP_2}$

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y)$$

$$x - x_1 = x_2 - x \text{ dan } y - y_1 = y_2 - y$$

Sehingga didapatkan nilai x dan y :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ dan } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Gambar 2.20

Dari pernyataan matematis diatas, dapat disimpulkan bahwasannya titik tengah sebuah segmen adalah setengah dari jumlah kedua absis dan setengah dari jumlah kedua ordinat dari titik-titik ujung segmen tersebut.

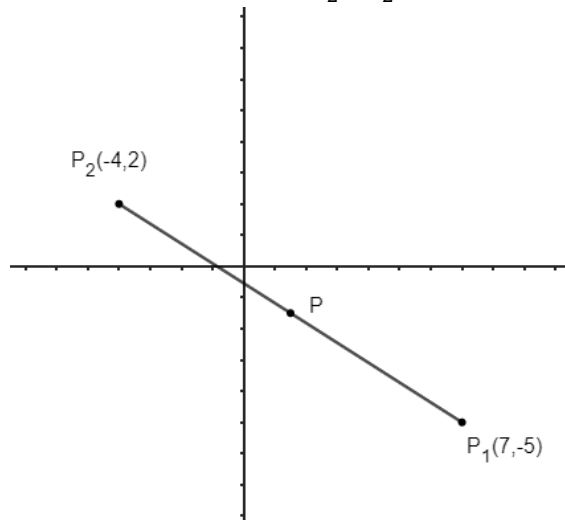
Contoh: Carilah koordinat titik tengah dari segmen yang terbentuk oleh $P_1(7, -5)$ dan $P_2(-4, 2)$

Penyelesaian:

Substitusikan ke $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ dan $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

$$x = \frac{7+(-4)}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{dan} \quad y = \frac{(-5)+2}{2} = -\frac{3}{2}$$

Jadi koordinat titik tengah nya adalah $P(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$



Gambar 2.21

Latihan Soal

1. Tentukanlah koordinat titik yang membagi segmen dari $P_1(5, 3)$ dan $P_2(-6, -3)$ dengan perbandingan 3: 2.
2. Diketahui koordinat $P_1(-3, 5)$ dan $P_2(-2, 3)$, tentukanlah koordinat titik P sehingga $P_1P = \frac{2}{3}P_1P_2$.
3. Jika diketahui salah satu titik ujung segmen $(5, -2)$, dan titik tengah segmen $(-2, -1)$. Carilah titik ujung kedua dari segmen tersebut.
4. Dalam perbandingan manakah titik $(0, 2)$ membagi segmen dengan titik-titik ujung $(-3, 0)$ dan $(3, -4)$?
5. Diketahui koordinat titik $P_1(3, 2)$ dan $P_2(-4, 1)$. Carilah koordinat-koordinat titik P dan P' yang terletak pada segmen P_1P_2 , jika diketahui $|P_1P| = \frac{3}{2}|P_1P_2|$