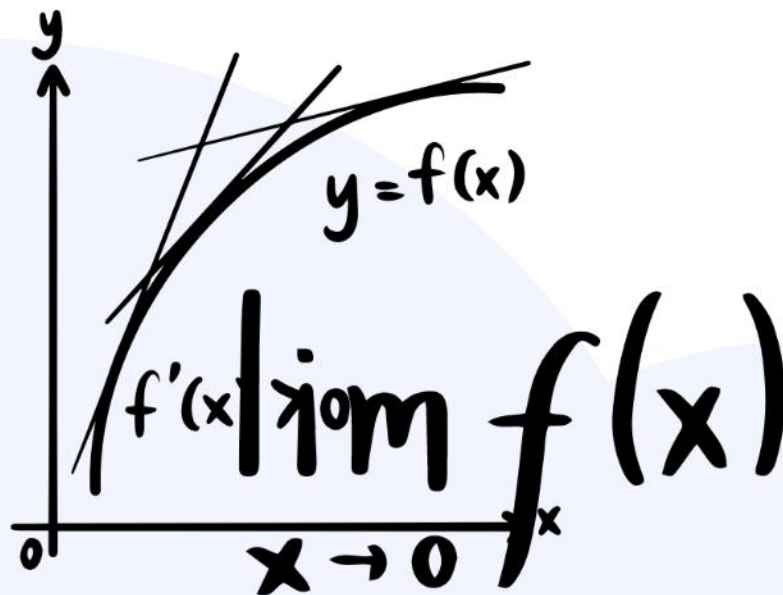




KALKULUS ELEMENTER II



Asmaidi
Resky Rusnanda

KALKULUS ELEMENTER II

Asmaidi
Resky Rusnanda



KALKULUS ELEMENTER II

Penulis:
Asmaidi
Resky Rusnanda

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : September 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18 x 25cm
ISBN : -

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun Buku Kalkulus Elementer II untuk mahasiswa Program Studi Matematika. Materi dalam buku ajar ini sesuai dengan perkembangan materi di dalam kalkulus elementer II.

Buku Kalkulus Elementer ini terdiri dari beberapa BAB di mulai dari pendahuluan, kemudian pembahasan mengenai integral tak tentu, dan pembahasan mengenai teknik integrasi. Pada setiap BAB di lengkapi dengan bahasan materi dan uji kompetensi. Penyelesaian penulisan buku ini tidak terlepas dari dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran dalam penyelesaian buku ajar ini. Buku ini membahas mulai dari Pendahuluan, integral tak tentu. Teknik integrasi, integral tentu sampai dengan aplikasi Integral.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang pendidikan khususnya bidang matematika sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas buku ajar ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Samarinda, 20 Agustus 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB 1 PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Ranah Keterampilan Umum	1
C. Ranah Keterampilan Khusus	1
D. Ranah Pengetahuan	2
E. Antiintegral	2
BAB 2 INTEGRAL TAK TENTU	5
A. Deskripsi Materi	5
B. Materi	5
1. Definisi Integral	5
2. Notasi dan Konstanta Integral	6
3. Integral tak tentu fungsi konstan	6
4. Integral tak tentu bentuk pangkat	7
5. Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri	11
a. Nilai fungsi trigonometri pada setiap kuadran	12
b. Kebalikan dari fungsi trigonometri	13
c. Sudut negatif dalam fungsi trigonometri	13
d. Rumus dasar integral trigonometri	13
6. Integral tak tentu sebagai operator linear	15
C. Rangkuman	20
D. Uji Kompetensi	21
1. Uji Kompetensi 1	21
2. Uji Kompetensi 2	22
BAB 3 TEKNIK INTEGRASI	24
A. Deskripsi Materi	24
B. Materi	24
1. Integral Substitusi	24
2. Integral Fungsi Eksponensial	27
3. Integral Fungsi Logaritma	29
4. Integral Fungsi Trigonometri Bentuk Tertentu	30
a. Bentuk integral	30
b. Bentuk integral	31

c. Identitas Trigonometri	32
d. Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi Trigonometri	32
e. Perkalian Fungsi Trigonometri	32
5. Integral Invers Fungsi Trigonometri	33
6. Integral Substitusi Trigonometri	35
7. Integral Parsial	36
C. Rangkuman	38
D. Uji Kompetensi	40
1. Uji Kompetensi 1	40
2. Uji Kompetensi 2	41
BAB 4 INTEGRAL TENTU	44
A. Deskripsi Materi	44
B. Materi	44
1. Rumus-rumus Integral Tentu	44
2. Sifat-sifat Integral Tentu	44
C. Rangkuman	45
D. Uji Kompetensi	45
1. Uji Kompetensi 1	45
2. Uji Kompetensi 2	46
BAB 5 APLIKASI INTEGRAL	48
A. Deskripsi Materi	48
B. Materi	48
1. Luas Daerah	48
a. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva dan Sumbu X	48
b. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Dua Kurva	49
2. Volume Benda Putar	49
a. Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu X	49
b. Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu Y	50
C. Rangkuman	50
D. Uji Kompetensi	51
a. Uji Kompetensi 1	51
b. Uji Kompetensi 2	51
DAFTAR PUSTAKA	55
KUNCI JAWABAN UJI KOMPETENSI 1 DAN UJI KOMPETENSI 2	56
GLOSARIUM	60

BAB 1

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Materi dalam Buku ajar kalkulus elementer II disusun sesuai Rencana Pembelajaran Semester (RPS) mata kuliah Kalkulus Integral di Program Studi Matematika. Tujuan penulisan Buku ajar ini adalah untuk membantu mahasiswa semester III dalam mempelajari materi yang terdapat dalam mata kuliah Kalkulus Integral. Dalam buku ajar tersebut terdapat 5 (tujuh) BAB diantaranya Pendahuluan, Integral Tak Tentu, Teknik Integrasi, Integral Tentu, dan Aplikasi Integral. Buku ajar Kalkulus Elementer II merupakan pondasi untuk mempelajari mempelajari mata kuliah pada semester berikutnya seperti Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Pemodelan Matematika, dan Matematika Biologi.

B. Ranah Keterampilan Umum

Mampu menguasai prinsip dasar bidang keahlian untuk menganalisis masalah, mengambil keputusan secara tepat, dan melakukan evaluasi, baik secara mandiri maupun kelompok

C. Ranah Keterampilan Khusus

1. Mampu mengembangkan pemikiran matematis, yang diawali dari pemahaman prosedural/ komputasi hingga pemahaman yang luas meliputi eksplorasi, penalaran logis, generalisasi, abstraksi, dan bukti formal.

2. Mampu mengamati, mengenali, merumuskan dan memecahkan masalah melalui pendekatan matematis dengan atau tanpa bantuan piranti lunak.

D. Ranah Pengetahuan

Menguasai konsep matematika murni dasar, matematika terapan sederhana, dan dasar - dasar pemrograman yang mendukung pembelajaran dan penelitian matematika.

E. Antiintegral

1. Definiri turunan fungsi y terhadap x didefinisikan dengan :

$$\frac{dy}{dx} = y' = p'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}$$

2. Rumus - rumus Dasar Turunan

$$a) p = a \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = 0$$

$$b) p = ax \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = a$$

$$c) p = ax^n \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = anx^{n-1}$$

$$d) p = aq(x) \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = aq'(x)$$

$$e) p = (q(x))^n \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = n(q(x))^{n-1} q'(x)$$

$$f) p = q(x) + h(x) \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = q'(x) + h'(x)$$

$$g) p = q(x) - h(x) \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = q'(x) - h'(x)$$

$$h) p = q(x)h(x) \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = q'(x)h(x) + q(x)h'(x)$$

$$i) p = \frac{q(x)}{h(x)} \rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = \frac{q'(x)h(x) - q(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

3. Turunan fungsi bersusun atau berantai dirumuskan:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dp}{du}$$

4. Jika diketahui $p(x) = y$, maka turunan dari fungsi trigonometri adalah

∴

a) $p(x) = y = \sin x, \rightarrow p'(x) = \frac{dy}{dx} = \cos x$

b) $p(x) = y = \cos x, \rightarrow p'(x) = \frac{dy}{dx} = -\sin x$

c) $p(x) = y = \tan x, \rightarrow p'(x) = \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

5. Rumus turunan invers fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

a) $p = \arcsin u \rightarrow \frac{dp}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

b) $p = \arccos u \rightarrow \frac{dp}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

c) $p = \arctan u \rightarrow \frac{dp}{du} = \frac{1}{u^2+1}$

6. Rumus-rumus dasar turunan fungsi eksponensial dan logaritma:

a) $p = e^x \rightarrow \frac{dp}{dx} = e^x$

b) $p = e^{q(x)} \rightarrow \frac{dp}{dx} = q'(x)e^{q(x)}$

c) $p = \log_c x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} \log_c e$

d) $p = \log_c q(x) \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{q'(x)}{q(x)} \log_c e$

e) $p = a^x \rightarrow \frac{dp}{dx} = a^x \ln a$

f) $p = \ln x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{x}$

g) $p = \ln[f(x)] \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

h) $p = \ln[q(x)] \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{q(x)} q'(x)$

7. Turunan Fungsi Hiperbolik

a) $p = \sinh x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \cosh x$

b) $p = \cosh x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \sinh x$

c) $p = \tanh x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$

d) $p = \coth x \rightarrow \frac{dp}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x, \quad x \neq 0$

$$\text{e) } p = \operatorname{sech} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = -\tanh x \operatorname{sech} x$$

$$\text{f) } p = \operatorname{csch} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = -\coth x \operatorname{csch} x, \quad x \neq 0$$

8. Turunan Fungsi Hiperbolik Invers

$$\text{a) } p = \operatorname{arsinh} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{b) } p = \operatorname{arcosh} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad 1 < x$$

$$\text{c) } p = \operatorname{artanh} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$\text{d) } p = \operatorname{arcoth} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad 1 < |x|$$

$$\text{e) } p = \operatorname{arsech} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$$

$$\text{f) } p = \operatorname{arcsch} x \rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0.$$

BAB 2

INTEGRAL TAK TENTU

A. Deskripsi Materi

Dalam Bab 2 ini materi yang diajarkan meliputi definisi integral, notasi dan konstanta integral, integral tak tentu fungsi konstan, integral tak tentu bentuk pangkat, integral tak tentu fungsi trigonometri, dan integral tak tentu sebagai operator linear.

B. Materi

1. Definisi Integral

Integral adalah antidiferensial yang merupakan operasi kebalikan atau invers dari diferensial. Jika $F(x)$ adalah suatu fungsi hasil integral dari $f(x)$ yang bersifat $F'(x) = f(x)$ dalam interval I untuk semua $x \in I$, maka $F(x)$ dapat dinotasikan:

$$F(x) = \int F'(x)dx \text{ atau } F(x) = \int f(x)dx$$

dengan $f(x)$ fungsi yang diintegrasikan dan x adalah integrator. Untuk memahami hubungan antara operasi pendiferensialan dengan operasi pengintegralan, tinjaulah fungsi $F(x)$ yang mempunyai turunan

$$F'(x) = f(x) = 2x$$

Banyak kemungkinan bentuk fungsi $F(x)$ yang memiliki turunan $f(x) = 2x$, sehingga secara umum bentuk fungsi $F(x)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$F(x) = x^2 + c,$$

yang disebut dengan himpunan antidiferensial atau himpunan antiturunan dari $F'(x) = f(x) = 2x$, dengan $c \in \mathbb{R}$. Untuk nilai c yang berbeda, maka akan diperoleh fungsi $F(x)$ yang berbeda pula.

2. Notasi dan Konstanta Integral

Operasi integral ditulis menggunakan notasi integral ($\int$) yang dikenalkan oleh Leibniz. Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x ditulis dalam bentuk

$$\int f(x)dx,$$

disebut sebagai integral tak tentu dari fungsi $f(x)$ terhadap x . Integral tak tentu dari fungsi $f(x)$ terhadap x secara umum dapat ditulis

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

dengan $F(x)$ dinamakan fungsi integral umum dan $F(x)$ bersifat $F'(x) = f(x)$, $f(x)$ disebut fungsi integran, dan c konstanta pengintegralan atau integrator.

3. Integral tak tentu fungsi konstan

Jika $f(x) = a$ dengan $f(x)$ adalah fungsi konstan dan a, c adalah konstanta, maka integral tak tentu fungsi konstan adalah:

a) $\int 0 dx = c$

b) $\int dx = x + c$

c) $\int adx = ax + c$

Contoh

Tentukan integral berikut:

1) $\int 3 dx = \dots$

2) $\int -11 dx = \dots$

3) $\int \frac{1}{2} dx = \dots$

4) $\int \sqrt{5} dx = \dots$

5) $\int |4| dx = \dots$

6) $\int \frac{1}{6}\sqrt{2}dx = \dots$

- 7) $\int (\sqrt{3} - 3\sqrt{7}) dx = \dots$
- 8) $\int \pi dx = \dots$
- 9) $\int (\pi - 2\sqrt{3}) dx = \dots$
- 10) $\int \left(\frac{1}{4} (\sqrt[3]{5} - \pi^2) \right) dx = \dots$

Penyelesaian

Mengikuti rumus integral fungsi konstan, maka hasil integral soal di atas adalah sebagai berikut.

- 1) $\int 3 dx = 3x + c$
- 2) $\int -11 dx = -11x + c$
- 3) $\int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x + c$
- 4) $\int \sqrt{5} dx = \sqrt{5}x + c$
- 5) $\int |4| dx = |4|x + c$
- 6) $\int \frac{1}{6}\sqrt{2} dx = \frac{1}{6}\sqrt{2}x + c$
- 7) $\int (\sqrt{3} - 3\sqrt{7}) dx = (\sqrt{3} - 3\sqrt{7})x + c$
- 8) $\int \pi dx = \pi x + c$
- 9) $\int (\pi - 2\sqrt{3}) dx = (\pi - 2\sqrt{3})x + c$
- 10) $\int \left(\frac{1}{4} (\sqrt[3]{5} - \pi^2) \right) dx = \left(\frac{1}{4} (\sqrt[3]{5} - \pi^2) \right) x + c$

4. Integral tak tentu bentuk pangkat

Jika n adalah bilangan riil dengan $n \neq -1$ dan c adalah konstanta, maka integral tak tentu bentuk pangkat adalah:

- a) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
- b) $\int ax^n = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, \quad \text{dengan } n \neq -1$

Contoh

Selesaikan integral berikut:

- 1) $\int x^2 dx = \dots$
- 2) $\int \frac{1}{5}x^2 dx = \dots$
- 3) $\int \frac{2}{x^3} dx = \dots$
- 4) $\int (x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \dots$
- 5) $\int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}\right) dx = \dots$
- 6) $\int (x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) dx = \dots$
- 7) $\int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right) dx = \dots$
- 8) $\int (x+2)(x-1) dx = \dots$
- 9) $\int 3x^2(2x^3 - 4) dx = \dots$
- 10) $\int \frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} dx = \dots$

Penyelesaian

Mengikuti rumus integral bentuk pangkat, maka hasil integral soal di atas adalah sebagai berikut.

- 1) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
- 2) $\int \frac{1}{5}x^2 dx = \frac{\frac{1}{5}x^{2+1}}{2+1} + c$
$$\int \frac{1}{5}x^2 dx = \frac{\frac{1}{5}x^3}{3} + c = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}x^3 + c$$
$$\int \frac{1}{5}x^2 dx = \frac{1}{15}x^3 + c$$
- 3) $\int \frac{2}{x^3} dx = \int 2x^{-3} dx$
$$= \frac{2x^{-3+1}}{-3+1} + c$$
$$= \frac{2x^{-2}}{-2} + c$$
$$= -x^{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2} + c$$

$$4) \int (x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \int (x^3 - 2x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$5) \int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \int (x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x + 2x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x + 2x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{\frac{1}{3}x^{1+1}}{1+1} + \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{1}{3}x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int (x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$\begin{aligned} 6) \int (x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) dx &= \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{2x^{3+1}}{3+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} \\ &\quad + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - x + c \end{aligned}$$

$$\int (x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x + c$$

$$\int (x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + x^2 - x + c$$

$$7) \int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5 \right) dx = \frac{\frac{2}{3}x^{3+1}}{3+1} - \frac{3x^{2+1}}{2+1} - \frac{\frac{1}{2}x^{1+1}}{1+1} + 5x + c$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5 \right) dx = \frac{\frac{2}{3}x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{\frac{1}{2}x^2}{2} + 5x + c$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + c$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5 \right) dx = \frac{1}{6}x^4 - x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 5x + c$$

$$8) \int (x+2)(x-1) dx = \int (x^2 + x - 2) dx$$

$$\int (x+2)(x-1) dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + c$$

$$\int (x+2)(x-1) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

$$9) \int 3x^2(2x^3 - 4) dx = \int (6x^5 - 12x^2) dx$$

$$\int 3x^2(2x^3 - 4) dx = \frac{6x^{5+1}}{5+1} - \frac{12x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$\int 3x^2(2x^3 - 4) dx = x^6 - 4x^3 + c$$

$$10) \int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2x^7}{x^2} + \frac{x^5}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \int (2x^{7-2} + x^{5-2} - 3x^{4-2}) dx$$

$$\int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \int (2x^5 + x^3 - 3x^2) dx$$

$$\int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \frac{2x^{5+1}}{5+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{3x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$\int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \frac{2x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + c$$

$$\int \left(\frac{2x^7 + x^5 - 3x^4}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + c$$

5. Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

Jika $f(x)$ adalah fungsi trigonometri dan c adalah konstanta, maka integral tak tentu dari fungsi trigonometri adalah:

$$a) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$b) \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$c) \int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c \\ = -\ln|\cos x| + c$$

$$d) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \\ = -\ln|\sec x - \tan x| + c$$

$$e) \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c \\ = -\ln|\csc x + \cot x| + c$$

$$f) \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$g) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$h) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$i) \int \tan x \cdot \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$j) \int \cot x \cdot \csc x \, dx = -\csc x + C$$

Perluasan rumus integral tak tentu fungsi trigonometri:

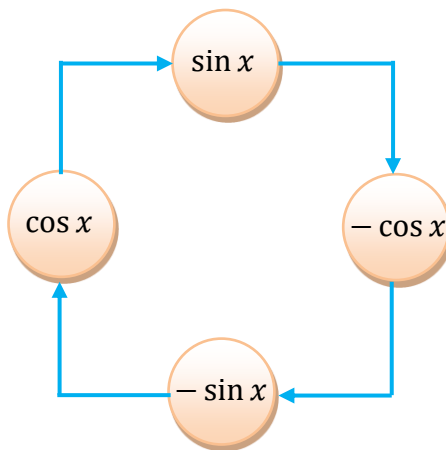
$$a) \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$b) \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$c) \int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$d) \int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

Untuk mempermudah mengingat integral tak tentu dari fungsi dasar trigonometri $\sin x$ dan $\cos x$, maka dapat digunakan pola lingkaran berikut:



Gambar 1. Diagram alir integral $\sin x$ dan $\cos x$

Berdasarkan diagram alir tersebut dapat ditentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri yaitu:

- a) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- b) $\int (-\cos x) \, dx = -\sin x + c$
- c) $\int (-\sin x) \, dx = \cos x + c$
- d) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

Dalam menyelesaikan integral tak tentu dari fungsi trigonometri, selain mempelajari rumus-rumus integral tak tentu dari fungsi trigonometri, kita harus memahami konsep dasar atau rumus-rumus dari trigonometri. Beberapa konsep trigonometri yang diperlukan untuk menyelesaikan integral tak tentu dari fungsi trigonometri antara lain.

a. Nilai fungsi trigonometri pada setiap kuadran

Dalam mempelajari fungsi trigonometri, kuadran merupakan konsep penting yang harus dipahami karena pada setiap kuadran nilai fungsi trigonometri dapat bernilai positif atau negatif. Untuk memahami hal tersebut, perhatikan Tabel 1.

Tabel 1. Nilai fungsi trigonometri pada setiap kuadran

Kuadran	Sudut (x)	Nilai Fungsi trigonometri		
		$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
I	$0^0 < x < 90^0$	+	+	+
II	$90^0 < x < 180^0$	+	−	−
III	$180^0 < x < 270^0$	−	−	+
IV	$270^0 < x < 360^0$	−	+	−

b. Kebalikan dari fungsi trigonometri

Adapun kebalikan-kebalikan dari fungsi trigonometri adalah sebagai berikut:

$$1) \sin x = \frac{1}{\csc x} \text{ sehingga } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$2) \cos x = \frac{1}{\sec x} \text{ sehingga } \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$3) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$4) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

c. Sudut negatif dalam fungsi trigonometri

$$1) \sin(-x) = -\sin x$$

$$2) \cos(-x) = \cos x$$

$$3) \tan(-x) = -\tan x$$

$$4) \csc(-x) = -\csc x$$

$$5) \sec(-x) = \sec x$$

$$6) \cot(-x) = -\cot x$$

d. Rumus dasar integral trigonometri

$$1) \int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

- $$2) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x - \tan x| + c$$
- $$= -\ln|\sec x + \tan x| + c$$
- $$3) \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$
- $$= -\ln|\csc x + \cot x| + c$$
- $$4) \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$
- $$5) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$
- $$6) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$
- $$7) \int \tan x \cdot \sec x \, dx = \sec x + c$$
- $$8) \int \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

Contoh

Selesaikan integral berikut:

- $$1) \int \sin 7x \, dx = \dots$$
- $$2) \int \sin\left(-\frac{1}{3}x\right) \, dx = \dots$$
- $$3) \int \cos 2x \, dx = \dots$$
- $$4) \int \cos(-\sqrt{3}x) \, dx = \dots$$
- $$5) \int \tan \frac{1}{9}x \, dx = \dots$$
- $$6) \int \tan(-2x) \, dx = \dots$$
- $$7) \int \sin(2x + 3) \, dx = \dots$$
- $$8) \int \tan\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \, dx = \dots$$
- $$9) \int \cos(-3x + 5) \, dx = \dots$$
- $$10) \int \tan(1 + 2x) \, dx = \dots$$

Penyelesaian

- $$1) \int \sin 7x \, dx = -\frac{1}{7}\cos 7x + c$$
- $$2) \int \sin\left(-\frac{1}{3}x\right) \, dx = 3\cos\left(-\frac{1}{3}x\right) + c$$
- $$\int \sin\left(-\frac{1}{3}x\right) \, dx = 3\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + c$$

$$3) \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$4) \int \cos(-\sqrt{3}x) \, dx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(-\sqrt{3}x) + c$$

$$\int \cos(-\sqrt{3}x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}x) + c$$

$$5) \int \tan \frac{1}{9}x \, dx = 9 \ln \left| \sec \frac{1}{9}x \right| + c \quad \text{atau}$$

$$\int \tan \frac{1}{9}x \, dx = -9 \ln \left| \cos \frac{1}{9}x \right| + c$$

$$6) \int \tan(-2x) \, dx = -\frac{1}{2} \ln |\sec(-2x)| + c \quad \text{atau}$$

$$\int \tan \frac{1}{9}x \, dx = \frac{1}{2} \ln |\cos(-2x)| + c$$

$$7) \int \sin(2x + 3) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + c$$

$$8) \int \tan \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \, dx = 2 \ln \left| \sec \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right| + c \quad \text{atau}$$

$$\int \tan \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \, dx = -2 \ln \left| \cos \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right| + c$$

$$9) \int \cos(-3x + 5) \, dx = -\frac{1}{3} \sin(-3x + 5) + c$$

$$10) \int \tan(1 + 2x) \, dx = \frac{1}{2} \ln |\sec(1 + 2x)| + c \quad \text{atau}$$

$$\int \tan(1 + 2x) \, dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos(1 + 2x)| + c.$$

6. Integral tak tentu sebagai operator linear

Jika f dan g merupakan fungsi yang memiliki integral, k dan c adalah konstanta, maka:

$$\int \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\} \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

Contoh

Selesaikan integral berikut:

- 1) $\int (x^2 + 1) dx = \dots$
- 2) $\int (x^3 + 2x^2) dx = \dots$
- 3) $\int (3x^3 - 5\sqrt{x}) dx = \dots$
- 4) $\int (x^4 - 3x^2 + 5x - 7) dx = \dots$
- 5) $\int \left(\frac{1}{2}x^5 + x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^2 + 2x - 5 \right) dx = \dots$
- 6) $\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = \dots$
- 7) $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = \dots$
- 8) $\int \left(\frac{2}{x^7} + 3x^4 - \frac{7}{x^3\sqrt{x}} - x\sqrt{x} \right) dx = \dots$
- 9) $\int (1 - x^2)(3x^3 - 2) dx = \dots$
- 10) $\int \left(\frac{2020}{\csc x} + \frac{2021}{\sec x} \right) dx = \dots$

Penyelesaian

- 1) $\int (x^2 + 1) dx = \int x^2 dx + \int dx$
$$\int (x^2 + 1) dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$
$$\int (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x + c$$
- 2) $\int (x^3 + 2x^2) dx = \int x^3 dx + \int 2x^2 dx$
$$\int (x^3 + 2x^2) dx = \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx$$
$$\int (x^3 + 2x^2) dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{2x^{2+1}}{2+1} + c$$
$$\int (x^3 + 2x^2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + c$$
$$\int (x^3 + 2x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$
- 3) $\int (3x^3 - 5\sqrt{x}) dx = \int 3x^3 dx - \int 5\sqrt{x} dx$

$$\int (3x^3 - 5\sqrt{x}) dx = 3 \int x^3 dx - 5 \int \sqrt{x} dx$$

$$\int (3x^3 - 5\sqrt{x}) dx = 3 \int x^3 dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (3x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{3x^{3+1}}{3+1} - \frac{5x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$\int (3x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (3x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{3}{4}x^4 - 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (3x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{10}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int (3x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \frac{3}{4}x^4 - 3\frac{1}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$4) \int (x^4 - 3x^2 + 5x - 7) dx = \int x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int 5x dx - \int 7 dx$$

$$= \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 7 \int dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{5x^{1+1}}{1+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 7x + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + c$$

$$5) \int \left(\frac{1}{2}x^5 + x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^2 + 2x - 5 \right) dx = \int \frac{1}{2}x^5 dx + \int x^2\sqrt{x} dx$$

$$- \int \frac{2}{3}x^2 dx + \int 2x dx - \int 5 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^5 dx + \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{2}{3} \int x^2 dx + 2 \int x dx - 5 \int dx$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^{5+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{\frac{2}{3}x^{2+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - \frac{5x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} x^6 + \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + x^2 - 5x + c \\
&= \frac{1}{12} x^6 + \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{2}{9} x^3 + x^2 - 5x + c
\end{aligned}$$

$$6) \quad \int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = \int \frac{2}{x^3} dx - \int x dx$$

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = \int 2x^{-3} dx - \int x dx$$

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = 2 \int x^{-3} dx - \int x dx$$

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = \frac{2x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = \frac{2x^{-2}}{-2} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \right) dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$7) \quad \int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = \int \frac{3}{x^5} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int 10 dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = \int 3x^{-5} dx - \int x^{-2} dx + \int 10 dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = 3 \int x^{-5} dx - \int x^{-2} dx + 10 \int dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = \frac{3x^{-5+1}}{-5+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{10x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^2} + 10 \right) dx = \frac{3x^{-5+1}}{-5+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{10x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$8) \quad \int \left(\frac{2}{x^7} + 3x^4 - \frac{7}{x^3\sqrt{x}} - x\sqrt{x} \right) dx = \int \frac{2}{x^7} dx + \int 3x^4 dx - \int \frac{7}{x^3\sqrt{x}} dx$$

$$- \int x\sqrt{x} dx$$

$$= \int 2x^{-7} dx + \int 3x^4 dx - \int \frac{7}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} dx - \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int 2x^{-7} dx + \int 3x^4 dx - \int \frac{7}{x^{3+\frac{1}{2}}} dx - \int x^{1+\frac{1}{2}} dx$$