



Aljabar Linier

UNTUK PERGURUAN TINGGI

Disusun oleh:

Dr. Supratman, M.Pd.

Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.

Indah Kirana Sumarman

ALJABAR LINIER UNTUK PERGURUAN TINGGI

Dr. Supratman, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.
Indah Kirana Sumarman



ALJABAR LINIER UNTUK PERGURUAN TINGGI

Penulis:

Dr. Supratman, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.
Indah Kirana Sumarman

Editor:

Dedi Nurjamil

Layouter :

Tim Kreatif PRCI

Cover:

Rusi

Cetakan Pertama : Agustus 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mai : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
A Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18 x 25 cm
ISBN : 978-623-448-973-6

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasa 72

Halaman Pengantar

Selamat datang di dunia aljabar linier, sebuah cabang matematika yang fundamental dan mendalam, yang memegang peranan penting dalam berbagai disiplin ilmu. Buku ini dirancang untuk memandu Anda melalui konsep-konsep dasar dan lanjutan aljabar linier dengan cara yang sistematis dan mudah dipahami.

Aljabar linier adalah kunci untuk memahami struktur ruang dan transformasi dalam matematika. Ia menawarkan alat yang kuat untuk menganalisis dan menyelesaikan masalah yang melibatkan sistem persamaan linier, vektor, dan matriks. Dari aplikasi praktis dalam teknik, fisika, dan ekonomi, hingga teori murni yang membentuk fondasi bagi banyak cabang matematika lainnya, aljabar linier memiliki peran yang tak tergantikan.

Dalam buku ini, kami memulai dengan pengantar dasar mengenai konsep vektor dan matriks, kemudian membahas operasi-operasi dasar yang dapat dilakukan pada entitas-entitas ini. Selanjutnya, kami menjelaskan sistem persamaan linier, ruang vektor, dan berbagai konsep penting seperti nilai eigen dan vektor eigen, serta dekomposisi matriks. Setiap bab dirancang untuk membangun pemahaman Anda secara bertahap dan menyertakan berbagai contoh serta latihan untuk memperdalam penguasaan materi.

Kami berharap buku ini tidak hanya menjadi sumber referensi yang berguna tetapi juga sumber inspirasi untuk mengeksplorasi lebih lanjut keindahan dan kekuatan aljabar linier. Selamat belajar dan semoga perjalanan matematika Anda penuh dengan penemuan dan pemahaman baru.

Penulis

Daftar Isi

1. SISTEM-SISTEM PERSAMAAN LINIER DAN MATRIKS	1
1.1. Pengantar Kepada Sistem-Sistem Persamaan Linier	1
1.2. Eliminasi Gauss	8
1.3. Sistem Persamaan Linier Homogen	13
1.4. Matriks dan Operasi Matriks	16
1.5. Kaidah-Kaidah Ilmu Hitung Matriks.....	20
1.6. Matriks elementer dan Metode untuk Mencari A^{-1}	26
1.7. Hasil Selanjutnya Mengenai Sistem Persamaan dan Keterbalikan.....	30
2. DETERMINAN.....	34
2.1. Fungsi Determinan	34
2.2. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris.....	37
2.3. Menghitung Determinan dengan Sarrus	38
2.4. Sifat-sifat Fungsi Determinan	40
2.5. Ekspansi Kofaktor; Aturan Cramer.....	41
3. VEKTOR-VEKTOR DI DALAM RUANG-2 DAN RUANG-3.....	48
3.1. Pengantar kepada Vektor (Geometrik).....	48
3.2. Norma Sebuah Vektor; Ilmu Hitung Vektor	52
3.3. Perkalian Titik; Proyeksi.....	55
3.4. Perkalian Silang	59
3.5. Garis dan Bidang di dalam Ruang-3	62
4. RUANG-RUANG VEKTOR	64
4.1. Ruang- n Euclidis.....	64
4.2. Ruang Vektor Umum.....	65
4.3. Subruang.....	66
4.4. Kebebasan Linier.....	68
4.5. Basis dan Dimensi	71

4.6.	Ruang Baris dan Ruang Kolom Sebuah Matriks; Rank; Pemakaian kepada Pencarian Basis	74
4.7.	Ruang Hasil Kali Dalam.....	77
4.8.	Panjang dan Sudut di dalam Ruang Perkalian Dalam	77
4.9.	Basis Ortonormal; Proses Gram-Schmid	78
4.10.	Kordinar; Perubahan Basis	79

1. SISTEM-SISTEM PERSAMAAN LINIER DAN MATRIKS

1.1. Pengantar Kepada Sistem-Sistem Persamaan Linier

Definisi 1

Persamaan linier adalah suatu persamaan dimana variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu. Jika kita mempunyai beberapa persamaan linear maka sekumpulan persamaan linear itu disebut sistem persamaan linear. Suatu pasangan beberapa bilangan disebut solusi dari suatu SPL jika pasangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut.

Sistem persamaan linier adalah kumpulan dari dua atau lebih persamaan linier yang memiliki variabel yang sama. Persamaan linier itu sendiri adalah persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk: $ax + by + cz + \dots = d$.

Contoh sistem persamaan linier dengan dua variabel:

$$a_1x + a_2y = b$$

$$a_1x + a_2x + a_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Persamaan pertama diatas disebut persamaan linier dalam peubah $\square$ dan $\square$. Persamaan kedua merupakan persamaan linier dibentuk dalam $\square$ peubah $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Dengan $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ dan $\square$ konstanta real, dan peubah-peubah dalam suatu persamaan linier kadang merupakan peubah yang tak diketahui.

Representasi Matriks

Sistem persamaan linier dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks untuk memudahkan penyelesaian. Misalnya, sistem persamaan linier:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 1 (Sistem Persamaan Linier)

Perhatikan SPL berikut ini:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ y &= \frac{1}{2}x + 3z + 1 & x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \end{aligned}$$

Perhatikanlah bahwa sebuah persamaan linier tidak melibatkan sesuatu hasil kali atau akar variabel. Semua variabel hanya terdapat sampai dengan angka pertama dan tidak muncul sebagai argumen untuk fungsi trigonometrik, fungsi logaritmik, atau untuk fungsi eksponensial. Yang berikut ini **bukanlah** persamaan linier:

$$\begin{aligned} x + 3y^2 + 7 & & 3x + 2y - z + xz &= 4 \\ y - \sin x &= 0 & \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Sebuah pemecahan persamaan linier $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan **himpunan pemecahannya**.

Contoh 2 (Solusi SPL)

Sekarang perhatikan sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa jika kita mengalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{3}$ maka diperoleh persamaan pertama. Dengan kata lain, SPL ini ekuivalen dengan satu persamaan:

$$x - 2y = 3$$

Kita mempunyai banyak pilihan dari pasangan x dan y yang memenuhi persamaan ini. Jika kita mengambil $\square \in \square$ sebarang maka $x = 3 + 2\square$, $y = \square$ merupakan solusi persamaan ini. Dengan demikian SPL semula mempunyai solusi tak hingga banyak.

Contoh 3 (Mencari Himpunan Solusi)

Perhatikan SPL berikut:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 4x + 8y = 6 \end{cases}$$

Carilah himpunan penyelesaiannya!

Jika kita mengalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{4}$ maka kita peroleh persamaan:

$$x + 2y = \frac{3}{2}$$

Jadi, SPL semula ekuivalen dengan:

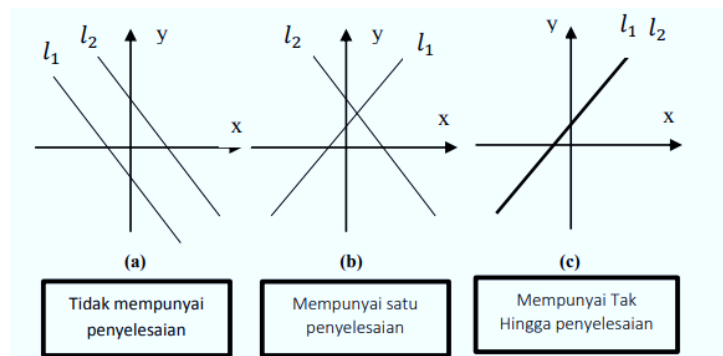
$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Jelas bahwa tidak ada pasangan x dan y yang memenuhi persamaan ini. Oleh karena itu SPL ini tidak mempunyai solusi. Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian disebut sebagai **tak-konsisten**, jika paling tidak ada satu penyelesaian, maka sistem disebut **konsisten**. Sebagai bahan ilustrasi, beberapa kemungkinan yang terjadi dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dalam peubah x dan y .

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (a_1, b_1 \text{ tidak keduanya nol})$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (a_2, b_2 \text{ tidak keduanya nol})$$

Grafik persamaan linier berbentuk garis, misalkan garis k_1 dan k_2 . Ada tiga gambar dari kedua grafik yang mungkin terjadi, sebagai berikut:



Gambar 1. Garis Penyelesaian SPL

Grafik kedua persamaan ini merupakan garis lurus yang disebut l_1 dan l_2 . Karena suatu titik (x, y) terletak pada garis tersebut jika dan hanya jika bilangan x dan y memenuhi persamaan dari garis tersebut, maka solusi-solusi dari sistem persamaan tersebut bersesuaian dengan titik-titik perpotongan l_1 dan l_2 . Terdapat tiga kemungkinan yang diilustrasikan pada gambar 1.

- Garis l_1 dan l_2 mungkin sejajar, yang berarti kedua garis tidak berpotongan dan sebagai konsekuensinya sistem tidak memiliki solusi.
- Garis l_1 dan l_2 mungkin berpotongan hanya pada 1 titik, yang berarti sistem hanya memiliki tepat satu lokasi.
- Garis l_1 dan l_2 mungkin berhimpun, yang berarti jumlah titik potongnya tak terhingga dan sebagai konsekuensinya terdapat tak terhingga banyaknya solusi untuk sistem tersebut.

Tiga kemungkinan di atas juga berlaku pada sebarang SPL dengan m buah persamaan dan n variabel. Sifat ini kita nyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1 (Solusi SPL)

Jika kita mempunyai sebuah SPL maka persis hanya satu dari tiga kemungkinan berikut dipenuhi (Anton, 2015):

- SPL mempunyai solusi tunggal
- SPL mempunyai solusi tak hingga
- SPL tidak memiliki solusi

Pada tiga contoh Gambar 1 di atas kita tidak menemui kesulitan untuk menguji eksistensi solusi karena banyaknya persamaan dan variabel hanya dua. Jika persamaan atau variabelnya lebih banyak tentu masalahnya sedikit lebih sulit. Kita akan mempelajari metode praktis untuk menguji eksistensi solusi SPL secara umum.

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m buah persamaan linear dengan n buah variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mempunyai bentuk umum yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah peubah sampai dengan n , dan a_{ij} , b_i menyatakan koefisien dan konstanta. Misalkan terdapat suatu sistem umum tiga persamaan dengan lima peubah, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= b_3 \end{aligned}$$

Penulisan indeks bawah ganda pada koefisien bilangan yang tak diketahui adalah sebuah alat yang berguna yang akan kita pakai untuk menyatakan letak dari koefisien di dalam

sistem tersebut. Indeks bawah pertama pada koefisien a_{ij} menunjukkan persamaan di dalam mana muncul koefisien tersebut, dan indeks bawah kedua menunjukkan bilangan yang tak diketahui mana yang dikalikan oleh koefisien tersebut. Jadi, a_{12} ada di dalam persamaan pertama dan mengalikan bilangan yang tak diketahui x_2 .

Jika kita menelusuri letak + 's, letak x's, dan letak ='s, maka sebuah sistem yang terdiri dari m persamaan linier dengan n bilangan yang tak diketahui dapat disingkat dengan hanya menuliskan susunan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Susunan ini dinamakan **matriks yang diperbesar** untuk sistem tersebut. Istilah matriks digunakan di dalam matematika untuk menyatakan sebuah susunan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Matriks muncul di dalam banyak konteks; kita akan mempelajarinya secara lebih terperinci di bagian-bagian akhir dari buku ini. Untuk melukiskannya, maka matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan-persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan (Operasi Baris Elementer)

Bila membangun sebuah matriks yang diperbesar, maka bilangan-bilangan yang tak diketahui harus dituliskan dalam urutan (atau orde) yang sama di dalam setiap pertanyaan.

Metoda dasar untuk memecahkan sebuah sistem persamaan-persamaan linier adalah untuk mengganti sistem yang diberikan dengan sebuah sistem baru yang mempunyai himpunan pemecahan yang sama, tetapi lebih mudah untuk memecahkannya. Sistem baru ini umumnya didapatkan dalam sederet langkah dengan memakai ketiga jenis operasi yang berikut untuk mengeliminasi bilangan-bilangan yang tak diketahui secara sistematis.

1. Kalikanlah sebuah persamaan dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkanlah dua persamaan.
3. Tambahkan kelipatan dsari satu persamaan kepada yang lainnya.

Karena baris (garis horizontal) di dalam sebuah matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan di dalam sistem yang diasosiasikan dengan baris tersebut, maka ketiga operasi ini bersesuaian operasi yang berikut pada baris matriks yang diperbesar.

1. Kalikanlah sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkanlah duabaris.
3. Tambahkan kelipatan dsari satu baris kepada yang lainnya.

Operasi-operasi ini dinamakan **Operasi Baris Elementer**. Contoh berikut melukiskan bagaimana operasi-operasi dapat digunakan untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linier. Karena sebuah prosedur yang sistematis untuk mencari pemecahan akan diturunkan di dalam bagian berikutnya, maka kita tidak perlu khawatir tentang bagaimana cara memiliki langkah-langkah di dalam contoh ini. Usaha utama saat ini harus dikerahkan untuk memahami perhitungan dan pembicaraan.

Contoh 4 (Menggunakan Operasi Baris Elementer)

Pada kolom kiri di bawah ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linier dengan melakukan operasi terhadap persamaan dalam sistem, sedangkan pada kolom kanan kita akan menyelesaikan sistem yang sama dengan melakukan operasi terhadap baris pada matriks yang diperbesar.

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

Tambahkan -2 kali persamaan pertama ke persamaan kedua untuk memperoleh

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2y - 7z &= -17 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

Tambahkan -3 kali persamaan pertama ke persamaan ketiga untuk memperoleh

$$x + y + 2z = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke persamaan kedua untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke persamaan ketiga untuk memperoleh

$$2y - 7z = -17$$

$$3y - 11z = -27$$

Kalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk

memperoleh

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$3y - 11z = -27$$

Tambahkan -3 kali persamaan kedua ke persamaan ketiga untuk memperoleh

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$-\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2}$$

Kalikan persamaan ketiga dengan -2 untuk memperoleh

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$z = 3$$

Tambahkan -1 kali persamaan kedua ke persamaan pertama untuk memperoleh

$$x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2}$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$z = 3$$

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga ke

persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua untuk memperoleh

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk

memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali persamaan kedua ke persamaan ketiga untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan ketiga dengan -2 untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -1 kali persamaan kedua ke persamaan pertama untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua untuk memperoleh

Solusi $z = 3$
 $x = 1, y = 2, z = 3$ kini telah
 diperoleh.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2. Eliminasi Gauss

Pada subbab ini kita akan mengembangkan prosedur sistematis untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Prosedur ini didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar pada suatu sistem menjadi matriks yang diperbesar lain yang cukup sederhana sehingga solusi sistem dapat diperoleh hanya dengan melakukan inspeksi terhadap sistem tersebut.

Definisi 2

Metode Eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE), sedemikian hingga matriksnya mempunyai baris eselon. Setelah membentuk baris eselon, kembalikan matriks tersebut dalam bentuk sistem linier dan kemudian lakukan substitusi balik mulai dari bawah.

Bentuk Eselon

Pada **Contoh 4** subbab sebelumnya, kita menyelesaikan suatu sistem linier dengan faktor-faktor yang tidak diketahui x, y dan z dengan reduksi matriks diperbesar menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi $x = 1, y = 2$, dan $z = 3$. Ini merupakan contoh matriks dalam bentuk **eselon baris tereduksi**. Matriks dalam bentuk ini harus memiliki sifat-sifat berikut:

1. Jika semua baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah sebuah angka 1 (kita sebut utama satu atau pivot).
2. Jika ada sebarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama dibagian bawah matriks.

3. Jika sebarang dua baris yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas.
4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

Suatu matriks yang mempunyai sifat nomer 1,2, dan 3 (tidak perlu 4) disebut mempunyai bentuk baris eselon. Jadi, matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi sudah pasti merupakan matriks dalam bentuk eselon baris, tetapi tidak sebaliknya.

Contoh 5 (Eselon Baris dan Eselon Baris Tereduksi)

Matriks-matriks yang berikut di dalam bentuk eselon baris yang direduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks berikut berada di dalam eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan (Eselon Baris)

Tidak sukar untuk melihat bahwa sebuah matriks di dalam bentuk eselon baris harus mempunyai nol di bawah setiap 1 utama. Bertentangan dengan hal ini maka sebuah matriks dalam bentuk eselon baris yang direduksi harus mempunyai nol di atas dan di bawah setiap 1 utama.

Jika, oleh sebuah urutan operasi baris elementer, matriks yang diperbesar untuk sebuah sistem persamaan-persamaan linier dibuat di dalam bentuk eselon baris yang direduksi, maka himpunan pemecahan untuk sistem tersebut dapat diperoleh dengan pemeriksaan atau, paling tidak, setelah sejumlah kecil langkah sederhana.

Contoh 6 (Baris Eselon Tereduksi)

Anggaplah bahwa matriks yang diperbanyak untuk suatu sistem persamaan linier telah direduksi oleh operasi baris, menjadi bentuk baris eselon tereduksi yang diberikan. Selesaikan sistem tersebut!

a.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian a. Sistem persamaan yang berpadanan dengan:

$$x_1 = 3$$

$$2x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 2$$

$$x_3 = 5$$

Sehingga tanpa menghitung yang berarti kita dapatkan nilai $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 5$.

Penyelesaian b. Sistem persamaan yang berpadanan dengan:

$$x_1 + 3x_2 = 4$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = -2$$

Peubah non utama dalam hal ini adalah x_2 disebut juga sebagai **peubah bebas**. Sehingga penyelesaian untuk sistem persamaan linier ini diubah kedalam bentuk peubah bebas menjadi

$$x_1 = 4 - 3x_2$$

Karena x_2 merupakan peubah bebas, sehingga dapat diberi sembarang nilai, katakanlah t , sehingga didapatkan nilai x_1 . Dengan demikian terdapat hingga banyaknya penyelesaian, dan penyelesaian umumnya diberikan oleh rumus

$$x_1 = 4 - t$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = -2$$

Contoh 7 (Metode Eliminasi Gauss)

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss!

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x + 4y + 9z = 36$$

Penyelesaian

Langkah 1: Bentuk menjadi matriks yang diperbesar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Pilih baris pertama kolom pertama sebagai utama satu (pivot), apabila sudah bernilai 1 lakukan operasi baris, yaitu baris kedua dikurangi baris pertama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Baris ketiga dikurangi baris pertama. Hal ini dilakukan mengingat nilai pada baris kedua dan ketiga adalah 1, sehingga langsung dikurangkan dengan baris pertama karena menghasilkan nilai nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Kembali ke atas di baris pertama kolom kedua, dengan pivot atau utama satu adalah satu di baris kedua kolom kedua. Kurangkan baris satu dengan baris kedua, sehingga nilainya nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: Operasikan baris ketiga dengan pivot pada baris kedua, dengan baris 3 dikurangkan 3 kali baris ke 2, sehingga menghasilkan nilai nol yang lain.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Langkah 6: Pivot berpindah secara diagonal pada baris ketiga, karena pivot dianjurkan untuk utama 1, dan nilai pada baris ketiga belum bernilai 1, maka baris-3 dapat dibagi dengan nilai 2 terlebih dahulu untuk mendapatkan utama satu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 7: Kembalikan ke sistem linier menjadi:

$$x - z = -2$$

$$y + 2z = 8$$

$$z = 3$$

Langkah 8: Lakukan *back substitution* (substitusi mundur), yaitu:

$$z = 3$$

$$y + 2(3) = 8 \rightarrow y = 8 - 6 = 2$$

$$x - (3) = -2 \rightarrow x = -2 + (3) = 1$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$.

Catatan (Back Substitution)

Seringkali lebih memudahkan untuk memecahkan sebuah sistem persamaan-persamaan linier dengan mengubah matriks yang diperbesar ke dalam bentuk eselon baris tanpa meneruskannya ke bentuk eselon baris yang direduksi. Bila hal ini dilakukan, maka sistem

persamaan-persamaan yang bersangkutan dapat dipecahkan dengan sebuah cara yang dinamakan *substitusi balik* (*back substitution*).

Bentuk akhir **Contoh 7** merupakan bentuk baris eselon yaitu **eliminasi Gaussian**, sedangkan untuk **eliminasi Gauss-Jordan** perlu dilakukan langkah lebih lanjut agar pada baris atau kolom yang terdapat utama 1 bernilai nol.

1.3. Sistem Persamaan Linier Homogen

Sistem persamaan linier homogen merupakan konsep fundamental dalam aljabar linier yang digunakan dalam berbagai bidang seperti matematika, fisika, dan rekayasa. Sistem ini terdiri dari persamaan-persamaan linier yang semua konstanta pada sisi kanannya adalah nol. Studi mengenai sistem ini melibatkan analisis solusi yang mungkin ada serta metode-metode untuk menemukan solusi tersebut.

Definisi 3

Sistem persamaan linier homogen adalah sekumpulan persamaan linier yang semuanya diatur agar sama dengan nol. Bentuk umumnya adalah:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks, sistem ini dapat dinyatakan sebagai:

$$AX = 0$$

Di mana A adalah matriks koefisien berukuran $m \times n$, dan X adalah vektor variabel $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dan 0 adalah vektor nol berukuran $m \times 1$.

Solusi Sistem Persamaan Linier Homogen

Sistem persamaan linier homogen selalu memiliki setidaknya satu solusi, yaitu solusi trivial.

1. Solusi Trivial

Solusi trivial adalah ketika semua variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ bernilai nol:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Solusi ini selalu ada di dalam setiap sistem persamaan linier homogen.

2. Solusi Non-Trivial

Solusi non-trivial adalah solusi di mana setidaknya satu variabel x_i tidak bernilai nol. Solusi ini ada jika dan hanya jika determinan dari matriks koefisien A sama dengan nol, atau jika rang dari A kurang dari jumlah variabel.

3. Ruang Solusi

Ruang solusi dari sistem persamaan linier homogen adalah himpunan semua vektor yang memenuhi sistem tersebut. Ruang solusi ini merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Metode Penyelesaian

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier homogen, termasuk metode eliminasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan.

1. Metode Eliminasi Gauss

Metode ini melibatkan pengubahan matriks AAA menjadi bentuk eselon baris tereduksi menggunakan operasi baris elementer. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- Pilih baris pivot dan gunakan untuk mengeliminasi elemen di bawah pivot.
- Lanjutkan proses ini hingga semua elemen di bawah pivot pada setiap kolom menjadi nol.
- Setelah mencapai bentuk eselon baris, gunakan substitusi mundur untuk menemukan solusi.

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode ini melibatkan perubahan matriks AAA menjadi bentuk eselon baris tereduksi row echelon form (RREF). Langkah-langkahnya adalah:

- Lakukan eliminasi Gauss untuk mengubah matriks ke bentuk eselon baris.
- Lanjutkan eliminasi pada elemen di atas pivot untuk mendapatkan nol di atas dan di bawah pivot.
- Hasil akhirnya adalah matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi, yang memudahkan penentuan solusi.

Contoh 8

Selesaikan sistem persamaan linier homogen berikut:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 1: Substraksikan 4 kali naris pertama dari baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Bagikan baris kedua dengan -3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Substraksikan 2 kali baris kedua dari baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi parametrik dapat ditulis sebagai:

$$x_3 = t, x_2 = -2t, x_1 = t$$

Dengan t sebagai parameter bebas.

Teorema 2 (SPL Homogen)

Sebuah sistem persamaan-persamaan linier homogen dengan lebih banyak bilangan yang tak diketahui daripada banyaknya persamaan selalu mempunyai tak terhingga banyaknya pemecahan.

1.4. Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah alat yang sangat penting dalam matematika, khususnya dalam aljabar linier. Matriks digunakan untuk merepresentasikan dan memanipulasi data, serta untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang teknik, ilmu komputer, fisika, dan ekonomi. Dalam subbab ini, kita akan membahas definisi matriks, jenis-jenis matriks, dan operasi-operasi dasar yang dapat dilakukan pada matriks.

Definisi 4

Matriks adalah sebuah array persegi panjang yang terdiri dari elemen-elemen, biasanya angka, yang diatur dalam baris dan kolom. Sebuah matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jenis-Jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yang sering digunakan dalam aljabar linier:

1. Matriks Nol

Matriks yang semua elemennya nol. Matriks nol berukuran $m \times n$ dilambangkan dengan $0_{m \times n}$.

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Identitas

Matriks persegi yang memiliki elemen 1 pada diagonal utama dan 0 pada elemen lainnya. Matriks identitas berukuran $m \times n$ dilambangkan dengan I_n .

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Diagonal

Matriks persegi di mana semua elemen di luar diagonal utama adalah nol.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Simetris

Matriks persegi yang elemennya simetris terhadap diagonal utama, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks

Ada beberapa operasi dasar yang dapat dilakukan pada matriks, termasuk penjumlahan, pengurangan, perkalian, invers, dan trace dari sebuah matriks.

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks A dan B dengan ukuran yang sama $m \times n$ dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian.

$$C = A + B \rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks A dan B dengan ukuran yang sama $m \times n$ dilakukan dengan mengurangi elemen-elemen yang bersesuaian.

$$C = A - B \rightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Perkalian dua matriks A berukuran $m \times n$ dan B berukuran $n \times p$ menghasilkan matriks C berukuran $m \times p$. Elemen c_{ij} dari matriks hasil diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen-elemen baris ke- i dari matriks A dengan elemen-elemen kolom ke- j dari matriks B .

$$C = AB \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1.2 + 2.1) & (1.0 + 2.2) \\ (3.2 + 4.1) & (3.0 + 4.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Transpose Matriks

Transpose matriks A berukuran $m \times n$ adalah matriks A^T berukuran $n \times m$ yang elemen-elemen baris ke- i dalam kolom ke- j dari A menjadi elemen-elemen kolom ke- i dan baris ke- j dari A^T .

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Invers Matriks

Invers dari matriks persegi A berukuran $n \times n$ adalah matriks A^{-1} yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, di mana I_n adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Matriks A memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \det(A) = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(4) - (2)(3)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

6. Trace dari Sebuah Matriks

Trace dari sebuah matriks adalah konsep penting dalam aljabar linier yang sering digunakan dalam berbagai aplikasi matematika dan ilmu fisika. Trace memberikan informasi tentang jumlah elemen diagonal utama dari sebuah matriks persegi.

Trace dari sebuah matriks persegi A berukuran $n \times n$ adalah jumlah semua elemen pada diagonal utama matriks tersebut. Secara matematis, trace dari matriks A dilambangkan sebagai $tr(A)$ atau $trace(A)$, dan didefinisikan sebagai:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Di mana a_{ii} adalah elemen diagonal utama dari matriks A .

Contoh:

Misakan A adalah matriks 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka, trace dari matriks A adalah:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

1.5. Kaidah-Kaidah Ilmu Hitung Matriks

Walaupun banyak dari kaidah-kaidah ilmu hitung bilangan real berlaku juga untuk matriks, namun ada beberapa pengecualian. Salah satu dari pengecualian yang terpenting terjadi di dalam perkalian matriks. Untuk bilangan-bilangan real a dan b , maka kita selalu mempunyai $ab = ba$. Sifat ini seringkali dinamakan hukum komutatif untuk perkalian. Akan tetapi, untuk matriks-matriks, maka AB dan BA tidak perlu sama. Kesamaan dapat gagal untuk berlaku karena tiga hal. Hal itu dapat terjadi, misalnya, bahwa AB didefinisikan tetapi BA tidak didefinisikan. Ini adalah kasus jika A adalah sebuah matriks 2×3 dan B adalah sebuah matriks 3×4 . Juga hal itu dapat terjadi bahwa AB dan BA kedua-duanya didefinisikan tetapi mempunyai ukuran yang berbeda-beda. Ini adalah situasi jika A adalah sebuah matriks 2×3 dan B adalah sebuah matriks 3×2 . Akhirnya, seperti yang diperlihatkan oleh contoh kita berikutnya, maka mungkin untuk memperoleh $AB \neq BA$ walaupun jika AB dan BA didefinisikan dan mempunyai ukuran yang sama.

Contoh 9 (Perkalian Matriks)

Tinjaulah matriks-matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikannya maka akan memberikan

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Walaupun hukum komutatif untuk perkalian tidak berlaku di dalam ilmu hitung matriks, namun banyak hukum-hukum ilmu hitung yang sudah biasa dikenal akan berlaku untuk

matriks beberapa diantara hukum yang paling penting dan nama-namanya di ikhtisarkan di dalam teorema berikut.

Teorema 3 (Kaidah-Kaidah Matriks)

Dengan menganggap bahwa ukuran-ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi-operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan maka kaidah-kaidah ilmu hitung matriks berikut akan berlaku.

$$(a) A + B = B + A \quad (\text{Hukum komutatif untuk penjumlahan})$$

$$(b) A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{Hukum asosiatif untuk penjumlahan})$$

$$(c) A(BC) = (AB)C \quad (\text{Hukum asosiatif untuk perkalian})$$

$$(d) A(B + C) = AB + AC \quad (\text{Hukum distributif})$$

$$(e) (B + C)A = BA + CA \quad (\text{Hukum distributif})$$

$$(f) A(B - C) = AB - AC$$

$$(g) (B - C)A = BA - BC$$

$$(h) a(B + C) = aB + aC$$

$$(i) a(B - C) = aB - aC$$

$$(j) (a + b)C = aC + bC$$

$$(k) (a - b)C = aC - bC$$

$$(l) (ab)C = a(bC)$$

$$(m) a(BC) = (aB)C = B(aC)$$

Setiap persamaan di dalam teorema ini menyatakan sebuah kesamaan di antara matriks-matriks. Untuk membuktikan salah satu dari kesamaan-kesamaan ini, maka kita perlu memperlihatkan bahwa matriks pada ruas kiri mempunyai ukuran yang sama seperti matriks pada ruas kanan, dan bawah entry-entri yang bersangkutan pada kedua ruas tersebut sama. Untuk melukiskannya, maka kita akan membuktikan dalam kurung H beberapa bukti selebihnya diberikan sebagai latihan-latihan.

Butki dari (h). Karena ruas kiri melibatkan operasi $B + C$, maka B dan C harus mempunyai ukuran yang sama, katakanlah $m \times n$. Jelaslah bahwa $a(B + C)$ dan $aB + aC$ adalah juga matriks $m \times n$, sehingga matriks-matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama.

Misalkanlah l_{ij} sebarang entri pada ruas kiri, dan misalkanlah r_{ij} entri yang bersangkutan pada ruas kanan. Untuk melengkapi bukti tersebut, maka kita harus memperlihatkan $l_{ij} = r_{ij}$. Jika kita misalkan a_{ij} , b_{ij} , dan c_{ij} berturut-turut adalah entri di dalam baris ke- i dan kolom ke- j dari A, B, C , maka dari definisi-definisi operasi matriks diperoleh:

$$l_{ij} = a(b_{ij} + c_{ij}) \quad \text{dan} \quad r_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij}$$

Karena $a(b_{ij} + c_{ij}) = ab_{ij} + ac_{ij}$, maka kita memperoleh $l_{ij} = r_{ij}$ yang melengkapi bukti tersebut.

Walaupun operasi penambahan matriks dan operasi perkalian matriks didefinisikan untuk pasangan matriks, namun hukum asosiatif (b) dan (c) memungkinkan kita untuk menyatakan jumlah dan hasil kali dari 3 matriks seperti $A + B + C$ dan $A B C$ tanpa menyisipkan sesuatu tanda kurung. Hal ini dibenarkan oleh kenyataan bahwa bagaimanapun tanda kurung tersebut disisipkan, hukum asosiatif menjamin bahwa hasil akhir yang sama akan didapatkan. Tanpa menyelidikinya secara terperinci kita mengamati bahwa hasil-hasil yang serupa untuk jumlah dan hasil perkalian yang melibatkan 4 atau lebih matriks. Umpamanya, *diberikan sebarang jumlah dan sebarang hasil perkalian matriks maka pasangan-pasangan kurung dapat disisipkan atau dihilangkan di mana saja di dalam pernyataan tersebut tanpa mempengaruhi hasil akhir.*

Contoh 10

Sebagai gambaran hukum asosiatif untuk perkalian matriks, tinjaulah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sebaliknya

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, $(AB)C = A(BC)$, seperti yang dijamin oleh **Teorema 3**.

Jika A adalah sebarang matriks dan 0 adalah matriks nol dengan ukuran yang sama, maka jelaslah bahwa $A + 0 = A$. Matriks 0 memainkan peranan yang sangat sama di dalam persamaan matriks seperti peranan yang dimainkan bilangan 0 di dalam persamaan numerik $a + 0 = a$.

Karena kita sudah mengetahui bahwa beberapa kaidah ilmu hitung untuk bilangan real tidak dapat digunakan kepada ilmu hitung matriks, maka akan merupakan anggapan yang gegabah bahwa semua sifat bilangan real nol akan dapat digunakan kepada matriks nol. Misalnya, tinjaulah kedua hasil standar berikut di dalam ilmu hitung bilangan real.

(i) Jika $ab = ac$ dan $a \neq 0$, maka $b = c$. (ini dinamakan *hukum peniadaan*)

(ii) Jika $ad = 0$, maka setidaknya satu dari faktor di sebelah kiri sama dengan 0 .

Seperti yang diperlihatkan pada **Contoh 11** maka hasil-hasil yang bersangkutan ternyata palsu di dalam ilmu hitung matriks.

Contoh 11

Perhatikan matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di sini

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Walaupun $A \neq 0$, namun tidaklah betul untuk meniadakan A dari kedua-dua ruas persamaan $AB = AC$ dan menuliskan $B = C$. Jadi hukum peniadaan tersebut gagal berlaku untuk matriks-matriks.

Juga, $AD = 0$; namun demikian $A \neq 0$ dan $D \neq 0$ sehingga hasil tersebut dalam (ii) di atas tidak dapat digunakan kepada ilmu hitung matriks.

Meskipun contoh-contoh ini menunjukkan hasil-hasil yang tidak sesuai dengan hasil-hasil di dalam ilmu hitung bilangan riil namun sejumlah sifat bilangan real 0 yang sudah lazim dikenal dapat digunakan langsung kepada matriks nol. Beberapa diantara sifat-sifat yang lebih penting di jelaskan lebih lanjut di dalam teorema berikutnya.

Teorema 4

Dengan menganggap bahwa ukuran-ukuran matriks adalah sedemikian rupa sehingga seoperasi-operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, maka kaidah-kaidah ilmu itu matriks yang berikut akan berlaku:

- a. $A + 0 = 0 + A = A$
- b. $A - A = 0$
- c. $0 - A = -A$
- d. $A0 = 0$
- e. $0A = 0$

Sebagai sebuah penerapan dari hasil-hasil kita mengenai ilmu hitung materi maka kita membuktikan teorema yang berikut, yang telah diduga sebelumnya di dalam buku ini

Teorema 5

Tiap-tiap sistem persamaan-persamaan linier akan mempunyai tidak ada pemecahan, persis satu pemecahan, atau tak terhingga banyaknya pemecahan.

Teorema 6