



ANALISIS VEKTOR

Untuk Perguruan Tinggi

Disusun Oleh: Elis Nurhayati, M.Pd.
Yeni Heryani, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.

ANALISIS VEKTOR UNTUK PERGURUAN TINGGI

Elis Nurhayati, M.Pd.
Yeni Heryani, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.



ANALISIS VEKTOR UNTUK PERGURUAN TINGGI

Penulis:
Elis Nurhayati, M.Pd.
Yeni Heryani, M.Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S.Pd.

Editor:
Dedi Nurjamil

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Agustus 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18 x 25cm
ISBN : 978-623-448-975-0

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Kepada Para Pembaca yang Terhormat,

Analisis vektor merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika yang memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Buku ini disusun dengan tujuan memberikan pemahaman yang komprehensif tentang konsep-konsep dasar analisis vektor serta menerapkannya dalam konteks nyata.

Dalam perjalanan mempelajari analisis vektor, pembaca akan dibawa melalui serangkaian konsep. Buku ini dirancang agar dapat digunakan oleh mahasiswa, praktisi, dan siapa pun yang ingin mendalami atau mengembangkan pemahaman mereka tentang topik yang menarik ini.

Penyusunan buku ini tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik dalam proses penulisan maupun dalam memberikan inspirasi dan motivasi. Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah memberikan kontribusi berharga dalam penyusunan buku ini.

Akhir kata, penulis berharap buku ini dapat memberikan manfaat yang besar bagi pembaca dalam memahami analisis vektor dengan lebih mendalam. Kritik, saran, dan masukan dari pembaca sangat diharapkan untuk perbaikan di masa mendatang.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Tasikmalaya, Juli 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB 1 VEKTOR DAN SKALAR.....	1
A. Definisi Vektor dan Skalar	1
B. Notasi Vektor.....	1
C. Contoh Vektor	2
D. Macam-Macam Vektor dan Contohnya	2
E. Vektor Satuan	3
F. Vektor-Vektor Satuan Tegak Lurus i, j, k	3
G. Contoh Komponen Vektor dan Vektor Komponen.....	4
H. Medan Skalar.....	5
I. Medan Vektor	5
J. Aljabar Vektor	6
K. Sifat-Sifat Operasi Aljabar Pada Vektor Dengan Pembuktiannya	7
L. Contoh Soal/Kasus.....	10
M. Latihan Soal.....	11
BAB 2 PERKALIAN TITIK DAN PERKALIAN SILANG.....	13
A. Perkalian Titik	13
1. Definisi Perkalian Titik.....	13
2. Sifat-sifat Perkalian Titik.....	13
3. Proyeksi Ortogonal	15
4. Contoh Soal	16
5. Latihan Soal	16
B. Perkalian Silang.....	17
1. Definisi Perkalian Silang	17
2. Sifat-sifat Perkalian Silang	17
3. Fungsi Vektor	20
4. Contoh Soal/Kasus.....	21
5. Latihan Soal	22
BAB 3 DIFERENSIASI VEKTOR.....	23
A. Turunan Parsial dari Vektor-Vektor	23
B. Diferensial dari Vektor-Vektor.....	23

C. Geometri Diferensial	24
D. Mekanika.....	25
E. Contoh Soal/Kasus.....	25
F. Latihan Soal	25
BAB 4 GRADIEN, DIVERGENSI DAN CURL	27
A. Operator Diferensial Vektor Del	27
B. Gradien	27
C. Divergensi.....	27
D. Curl.....	28
E. Sifat dan Pembuktian	28
F. Contoh Soal/Kasus.....	30
G. Latihan Soal.....	30
BAB 5 INTEGRASI VEKTOR	31
A. Integral biasa dari vektor	31
B. Integral garis	31
C. Teorema	32
D. Integral Permukaan	32
E. Integral Volume	33
F. Contoh Soal/Kasus.....	34
G. Latihan Soal.....	34
BAB 6 TEOREMA DIVERGENSI, TEOREMA STOKES, DAN TEOREMA- TEOREMA INTEGRAL YANG BERKAITAN.....	36
A. Teorema Divergensi Gauss	36
B. Teorema Stokes	36
C. Teorema Green dalam Bidang.....	36
D. Teorema-Teorema Integral yang berkaitan	37
E. Bentuk Operator Integral Untuk ∇	37
F. Contoh Soal/Kasus.....	38
G. Latihan Soal.....	38
LAMPIRAN.....	39
DAFTAR PUSTAKA.....	60

BAB 1

VEKTOR DAN SKALAR

A. Definisi Vektor dan Skalar

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah seperti perpindahan (*displacement*), kecepatan, gaya dan percepatan (Spiegel, 1999; Sulistyorini, Yunis; Argarini, Dian Fitri; Yazidah, Nok Izatul; Kartika, 2017).

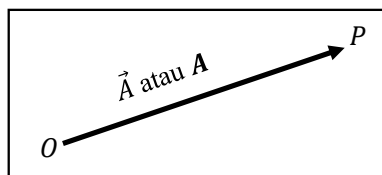
Vektor adalah suatu kuantitas/besaran yang mempunyai besar dan arah. Secara grafis suatu vektor ditunjukkan sebagai potongan garis yang mempunyai arah. Besar atau kecilnya vektor ditentukan oleh panjang atau pendeknya potongan garis. Sedangkan arah vektor ditunjukkan dengan tanda anak panah.

Vektor adalah besaran fisis yang memiliki magnitude (besarnya) dan arah. Dalam matematika, vektor sering direpresentasikan sebagai panah yang panjangnya sesuai dengan magnitude vektor dan arahnya menunjukkan arah vektor tersebut.

Skalar adalah besaran yang mempunyai besar tetapi tidak memiliki arah. Contoh dari besaran skalar sendiri adalah massa, panjang, waktu, suhu, dan sebarang bilangan riil. Skalar dinyatakan oleh huruf-huruf biasa seperti dalam aljabar elementer. Operasi-operasi dengan skalar mengikuti aturan-aturan yang sama seperti halnya dalam aljabar elementer (Spiegel, 1999; Sulistyorini, Yunis; Argarini, Dian Fitri; Yazidah, Nok Izatul; Kartika, 2017).

B. Notasi Vektor

Notasi vektor umumnya menggunakan huruf tebal atau dengan menulis panjang vektor dengan tanda panah di atasnya. Misalnya, vektor posisi A dapat ditulis sebagai $\vec{A}$ atau menggunakan panah di atasnya ($\vec{A}$).



Secara grafis, vektor digambarkan oleh sebuah anak panah OP pada gambar di atas yang mendefinisikan arahnya sedangkan besarnya dinyatakan oleh panjang anak panah. Ujung pangkal O dari anak panah disebut titik asal atau titik pangkal vektor dan ujung kepala P disebut titik terminal atau *terminus*.

Secara analitis, vektor dilambangkan oleh sebuah huruf dengan anak panah di atasnya, seperti $\vec{A}$ dalam Gambar 1 dan besarnya dinyatakan oleh $|\vec{A}|$ atau A . Dalam karya cetakan, huruf dengan cetakan tebal seperti **A** , dipergunakan untuk menyatakan vektor $\vec{A}$ sedangkan $|A|$ atau A menyatakan besarnya. Dalam buku ini akan kami pergunakan notasi huruf dengan cetakan tebal ini. Vektor OP juga dinyatakan sebagai $\overrightarrow{OP}$ atau **OP** , dalam hal ini maka besarnya akan kita nyatakan $\overline{OP}$, $|\overrightarrow{OP}|$ atau **$|OP|$** (Spiegel, 1999; Sulistyorini, Yunis; Argarini, Dian Fitri; Yazidah, Nok Izatul; Kartika, 2017).

C. Contoh Vektor

1. Vektor posisi: vektor yang menyatakan posisi suatu titik relatif terhadap titik acuan.
2. Vektor kecepatan: vektor yang menyatakan perubahan posisi dalam satuan waktu.
3. Vektor percepatan: vektor yang menyatakan perubahan kecepatan dalam satuan waktu.
4. Vektor gaya: vektor yang merepresentasikan interaksi antara objek-objek.

D. Macam-Macam Vektor dan Contohnya

1. Vektor Ruang

Vektor yang memiliki tiga komponen dan merepresentasikan arah dan magnitude dalam ruang tiga dimensi. Contoh: (3, -2, 5) yang merepresentasikan vektor yang bergerak 3 satuan ke kanan, 2 satuan ke bawah, dan 5 satuan ke atas.

2. Vektor Satuan

Vektor yang memiliki magnitude 1 dan digunakan untuk menggambarkan arah tanpa memperhatikan besaran. Contoh: (1, 0) yang merepresentasikan unit vektor yang bergerak 1 satuan ke kanan.

3. Vektor Kolom

Vektor yang ditulis dalam bentuk matriks kolom, yaitu dengan elemen-elemennya disusun secara vertikal. Contoh: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan vektor yang bergerak 2 satuan ke kanan, 1 satuan ke bawah, dan 3 satuan ke atas.

4. Vektor Baris

Vektor yang ditulis dalam bentuk matriks baris, yaitu dengan elemen-elemennya disusun secara horizontal. Contoh: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan vektor yang bergerak 2 satuan ke kanan, 1 satuan ke bawah, dan 3 satuan ke atas.

5. Vektor Nol

Vektor spesial yang semua komponennya memiliki nilai nol. Contoh: $(0, 0, 0)$ yang merepresentasikan tidak ada pergerakan.

6. Vektor Ortogonal

Vektor yang saling tegak lurus sehingga hasil perkalian dot antara keduanya nol. Contoh: vektor $(1, 2, 3)$ dan vektor $(1, -2, 1)$ merupakan vektor ortogonal.

7. Vektor Berlawanan Arah

Vektor yang memiliki arah yang berlawanan tetapi memiliki magnitude yang sama. Contoh: vektor $(3, -2)$ dan vektor $(-3, 2)$ merupakan vektor berlawanan arah.

8. Vektor Unit

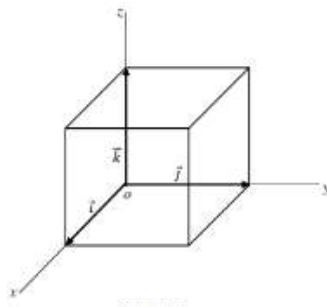
Vektor yang memiliki magnitude 1, biasa digunakan untuk menormalisasi vektor. Contoh: $(0.6, -0.8)$ yang merepresentasikan vektor unit yang bergerak 0.6 satuan ke kanan dan -0.8 satuan ke bawah.

E. Vektor Satuan

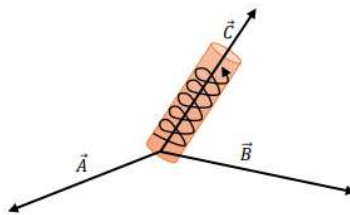
Adalah sebuah vektor yang besarnya satu. Jika $\vec{A}$ adalah sebuah vektor yang besarnya $\vec{A} \neq 0$, maka $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ adalah sebuah vektor satuan yang arahnya sama dengan $\vec{A}$. Setiap vektor $\vec{A}$ dapat dinyatakan oleh sebuah vektor satuan $\vec{a}$ dalam arah $\vec{A}$ dikalikan dengan besarnya $|\vec{A}|$. Dalam simbol, $\vec{A} = |\vec{A}|\vec{a}$ (Spiegel, 1999; Sulistyorini, Yunis; Argarini, Dian Fitri; Yazidah, Nok Izatul; Kartika, 2017).

F. Vektor-Vektor Satuan Tegak Lurus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Himpunan vektor-vektor satuan yang penting adalah yang arahnya menurut sumbu-sumbu x, y , dan z positif dari sistem koordinat tegak lurus ruang tiga dimensi, masing-masingnya dinyatakan oleh $\vec{i}, \vec{j}$, dan $\vec{k}$ (pada gambar di bawah) (Spiegel, 1999).



Kita akan menggunakan sistem koordinat tegak lurus aturan tangan kanan kecuali ada pernyataan lainnya. Sistem demikian dinamakan dari kenyataan bahwa sebuah sekrup bergulir kanan yang diputar 90° dari O_x ke O_y akan maju dalam arah sumbu z positif, seperti dalam Gambar di atas. Pada umumnya, tiga buah vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$ yang titik-titik pangkalnya berimpit dan tak-koplanar (*coplanar*), yakni tidak terletak pada atau sejajar bidang yang sama disebut membentuk sebuah sistem tangan kanan atau sistem dekstral jika sebuah sekrup bergalur kanan yang diputar dengan sudut yang lebih kecil daripada 180° dari $\vec{A}$ ke $\vec{B}$ akan maju dalam arah $\vec{C}$ seperti diperlihatkan dalam gambar di bawah.

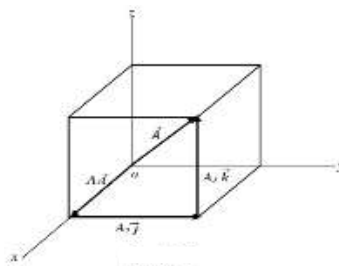


G. Contoh Komponen Vektor dan Vektor Komponen

Dalam koordinat kartesian, vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponen yang menyatakan sumbunya. Misalnya, vektor $A = (3, 4)$ memiliki komponen $x = 3$ dan komponen $y = 4$.

Vektor komponen adalah cara lain untuk merepresentasikan vektor dengan menggunakan jumlah komponen vektor yang sesuai. Misalnya, vektor posisi $v = (3, 4)$ dapat dianggap sebagai vektor komponen dengan komponen $x = 3$ dan komponen $y = 4$.

Setiap vektor $\vec{A}$ dalam ruang 3 dimensi dapat digambarkan dengan titik pangkal pada titik asal O dari sistem koordinat tegak lurus (pada gambar di bawah). Misalkan (A_1, A_2, A_3) koordinat-koordinat tegak lurus titik terminal dari vektor $\vec{A}$ dengan titik asal pada O . Vektor-vektor $A_1\vec{i}$, $A_2\vec{j}$ dan $A_3\vec{k}$ disebut vektor-vektor komponen tegak lurus atau secara singkat vektor-vektor komponen dari $\vec{A}$ berturut-turut dalam arah-arah x , y , dan z .



A_1, A_2, A_3 disebut vektor-vektor komponen tegak lurus atau secara singkat komponen-komponen dari $\vec{A}$ berturut-turut dalam arah-arah x, y , dan z .

Jumlah atau resultan dari $A_1\vec{i}$, $A_2\vec{j}$ dan $A_3\vec{k}$ adalah vektor $\vec{A}$ sehingga kita dapat menulis:

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$

Sedangkan besar dari $\vec{A}$ sendiri dapat dinyatakan:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Pada khususnya, vektor posisi atau vektor jejari (*Radius vector*) $\vec{r}$ dari O ke titik (x, y, z) ditulis:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dan besarnya:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(Spiegel, 1999)

H. Medan Skalar

Jika pada tiap-tiap titik (x, y, z) dari suatu daerah R dalam ruang dikaitkan sebuah bilangan atau skalar $\phi(x, y, z)$ maka ϕ disebut fungsi skalar dari kedudukan atau fungsi titik skalar (*scalar point function*) dan kita mengatakan bahwa sebuah medan skalar ϕ telah didefinisikan dalam R .

Contoh-contoh:

- (1) Temperatur pada setiap titik di dalam atau di atas permukaan bumi pada suatu saat tertentu mendefinisikan sebuah medan skalar
- (2) $\phi(x, y, z) = x^3y - z^2$ mendefinisikan sebuah medan skalar.

Sebuah medan skalar yang tak bergantung pada waktu disebut medan skalar stationer (Spiegel, 1999).

I. Medan Vektor

Jika pada tiap-tiap titik (x, y, z) dari suatu daerah R dalam ruang dikaitkan sebuah vektor $\vec{V}(x, y, z)$, maka $\vec{V}$ disebut fungsi vektor dari kedudukan atau fungsi titik vektor (*vector point function*) dan kita mengatakan bahwa sebuah medan vektor $\vec{V}$ telah didefinisikan dalam R .

Contoh-contoh:

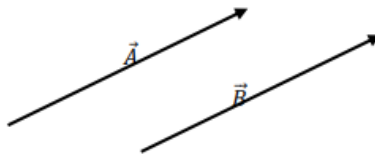
- (1) Jika kecepatan pada setiap titik (x, y, z) dalam sebuah fluida yang sedang bergerak diketahui pada suatu saat tertentu, maka medan vektor terdefiniskan.
- (2) $\vec{V}(x, y, z) = xy^2\vec{i} - 2yz^3\vec{j} + x^2z\vec{k}$ mendefinisikan sebuah medan vektor.

Sebuah medan vektor yang tak bergantung pada waktu disebut sebuah medan vektorstasioner atau keadaan (Spiegel, 1999).

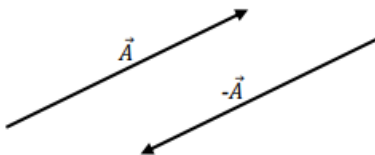
J. Aljabar Vektor

Operasi-operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian yang lazim dalam aljabar dari bilangan-bilangan atau skalar-skalar, dengan definisi yang sesuai, dapat diperluas ke dalam aljabar dari vektor-vektor. Berikut adalah definisi-definisi yang harus diperhatikan (Spiegel, 1999; Sulistyorini, Yunis; Argarini, Dian Fitri; Yazidah, Nok Izatul; Kartika, 2017):

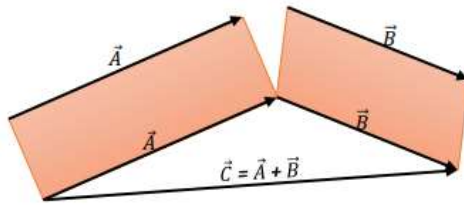
1. Dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ sama jika mereka memiliki besar dan arah yang sama tanpa memandang kedudukan titik-titik awalnya. Jadi $\vec{A} = \vec{B}$. Definisi ini bisa diilustrasikan pada gambar di bawah ini.



2. Sebuah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{A}$ tetapi memiliki besar yang sama dinyatakan oleh $-\vec{A}$. Definisi ini bisa dilihat pada gambar di bawah ini.



3. Jumlah atau resultan dari vektor-vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah sebuah vektor $\vec{C}$ yang dibentuk dengan menempatkan titik pangkal dari $\vec{B}$ ada titik ujung dari $\vec{A}$ dan kemudian menghubungkan titik pangkal dari $\vec{A}$ dengan titik ujung dari $\vec{B}$ (pada gambar di bawah). Jumlah ini ditulis $\vec{A} + \vec{B}$, yakni $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Definisi ini ekuivalen dengan hukum jajaran genjang untuk penjumlahan vektor. Perluasan ke dalam penjumlahan lebih daripada dua buah vektor adalah langsung.



4. Selisih dari vektor-vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yang dinyatakan oleh $\vec{A} - \vec{B}$, adalah vektor $\vec{C}$ yang apabila ditambahkan pada $\vec{B}$ menghasilkan vektor $\vec{A}$. Secara ekuivalen $\vec{A} - \vec{B}$ dapat didefinisikan sebagai jumlah $\vec{A} + (-\vec{B})$.
Jika $\vec{A} = \vec{B}$, maka $\vec{A} - \vec{B}$ didefinisikan sebagai vektor nol atau vektor kosong dan dinyatakan oleh simbol $\vec{0}$ atau secara singkat 0. Besarnya nol dan tak memiliki arah yang tertentu. Vektor yang tak nol adalah vektor sejati (*proper vector*). Semua vektor akan dipandangsejati kecuali bila ada pernyataan lainnya.
5. Hasil kali sebuah vektor $\vec{A}$ dengan sebuah skalar m adalah sebuah vektor $m\vec{A}$ yang besarnya $|m|$ positif atau negatif. Jika $m = 0$ maka $m\vec{A}$ adalah sebuah vektor nol.

K. Sifat-Sifat Operasi Aljabar Pada Vektor Dengan Pembuktiannya

Teorema 1

Jika u, v , dan w vektor-vektor di R^2 atau di R^3 dan k serta l skalar tak nol maka berlaku hubungan berikut :

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $k(lu) = (kl)u$
6. $k(u + v) = ku + kv$
7. $(k + l)u = ku + lu$
8. $1u = u$

(Anton, 1995)

Pembuktian:

1. Sifat komutatif

$$u + v = v + u$$

Bukti

Ambil sebarang vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$, maka:

$$\begin{aligned}u + v &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\&= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \\&= v + u \text{ [Terbukti]}\end{aligned}$$

2. Asosatif penjumlahan

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

Bukti

Ambil sebarang vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ dan $w = (w_1, w_2, w_3)$, maka:

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\&= [(u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, (u_3 + v_3) + w_3] \\&= [u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), u_3 + (v_3 + w_3)] \\&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\&= (u_1, u_2, u_3) + [(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)] \\&= u + (v + w) \text{ [Terbukti]}\end{aligned}$$

3. Identitas Penjumlahan

$$u + 0 = 0 + u = u$$

Bukti:

Ambil sebarang vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan vektor nol, $0 = (0, 0, 0)$

Pertama akan dibuktikan $u + 0 = 0 + u$,

$$\begin{aligned}u + 0 &= (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) \\&= (u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0) \\&= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3) \text{ [komutatif penjumlahan bilangan real]} \\&= (0, 0, 0) + (u_1, u_2, u_3) \\&= 0 + u \text{ [Terbukti]}\end{aligned}$$

Selanjutnya akan di buktikan $u + 0 = u$

$$\begin{aligned}u + 0 &= (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) \\&= (u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0) \\&= (u_1, u_2, u_3) \text{ [identitas penjumlahan]} \\&= u \text{ [Terbukti]}\end{aligned}$$

4. Invers/lawan penjumlahan

$$u + (-u) = 0$$

Bukti:

Ambil sebarang vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$, maka

$$\begin{aligned} u + 0 &= (u_1, u_2, u_3) + (-u_1, -u_2, -u_3) \\ &= [u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), u_3 + (-u_3)] \\ &= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, u_3 - u_3) \\ &= (0, 0, 0) \text{ [Invers/lawan penjumlahan]} \\ &= 0 \text{ [Terbukti]} \end{aligned}$$

5. Asosiatif Perkalian

$$k(lu) = (kl)u$$

Bukti:

Ambil sebarang skalar k dan l serta vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$, maka:

$$\begin{aligned} k(lu) &= k [l (u_1, u_2, u_3)] \\ &= k (lu_1, lu_2, lu_3) \\ &= [k (lu_1), k (lu_2), k (lu_3)] \\ &= [(kl)u_1, (kl)u_2, (kl)u_3] \text{ [asosiatif perkalian perkalian bilangan real]} \\ &= (kl) (u_1, u_2, u_3) \\ &= (kl) u \text{ [Terbukti]} \end{aligned}$$

6. Distributif

$$k(u + v) = ku + kv$$

Bukti:

Ambil sebarang skalar k serta vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$, maka :

$$\begin{aligned} k(u + v) &= k [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] \\ &= k (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= [k (u_1 + v_1), k(u_2 + v_2), k(u_3 + v_3)] \\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, ku_3 + kv_3) \text{ [distributif bilangan bilangan real]} \\ &= (ku_1, ku_2, ku_3) + (kv_1, kv_2, kv_3) \\ &= k (u_1, u_2, u_3) + k (v_1, v_2, v_3) \\ &= k u + k v \text{ [Terbukti]} \end{aligned}$$

7. $(k + l)u = ku + lu$

Bukti:

Ambil sebarang skalar k dan l serta vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$, maka :

$$\begin{aligned}
(k+l)u &= (k+l)(u_1, u_2, u_3) \\
&= [(k+l)u_1, (k+l)u_2, (k+l)u_3] \\
&= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, ku_3 + lu_3) \text{ [distributif bilangan bilangan real]} \\
&= (ku_1, ku_2, ku_3) + (lu_1, lu_2, lu_3) \\
&= k(u_1, u_2, u_3) + l(u_1, u_2, u_3) \\
&= ku + lu \text{ [Terbukti]}
\end{aligned}$$

8. $1u = u$

Bukti:

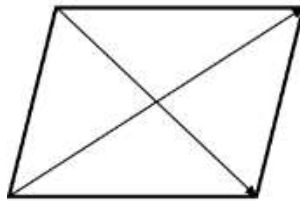
Ambil skalar 1 serta sebarang vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$, maka:

$$\begin{aligned}
1u &= 1(u_1, u_2, u_3) \\
&= (1u_1, 1u_2, 1u_3) \\
&= (u_1, u_2, u_3) \text{ [identitas perkalian]} \\
&= u \text{ [Terbukti]}
\end{aligned}$$

L. Contoh Soal/Kasus

- Nyatakan manakah dari yang berikut ini adalah vektor.
 - Berat
 - Kalori
 - Panas jenis
 - Momentum
 - Kerapatan
 - Energi
 - Volume
 - Jarak
 - Kecepatan
 - Intensitas medan magnetik
- Perlihatkan bahwa penjumlahan vektor adalah komutatif, yakni $A + B = B + A$.
- Salah satu operasi yang ada pada vektor yaitu operasi penjumlahan vektor, Jelaskan aturan yang berlaku pada operasi penjumlahan vektor baik secara aljabar maupun geometris, serta berikan contohnya!
- Diketahui vektor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Tentukan vektor $\vec{u}$!

5. Gambarlah beberapa buah vektor sembarang, misalnya 5 buah vektor dan tentukan komponen-komponennya serta buatlah secara geometris dan aljabar hasil penjumlahan, hasil pengurangan, kombinasi penjumlahan dan pengurangan, serta perkalian dengan skalarnya!
6. Sebuah mobil bergerak ke arah utara sejauh 3 km, kemudian bergerak 5 km ke arah timur laut. Gambarkan perpindahan ini secara grafis dan tentukan vektor perpindahan resultannya!
7. Buktikan bahwa diagonal-diagonal dari jajargenjang saling memotong di tengah-tengahnya, seperti pada gambar di bawah ini.



M. Latihan Soal

1. Diketahui vektor-vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$. Gambarkan $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$ dan $3\vec{C} - \frac{1}{2}(2\vec{A} - \vec{B})$!
2. Perlihatkan bahwa penjumlahan vektor adalah asosiatif, yakni $A + (B + C) = (A + B) + C$!
3. Misalkan $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, -3, 1)$, dan $w = (3, 2, -1)$. Carilah komponen-komponen dari $2v - (u + w)$!
4. Diketahui titik-titik $A(2, 5, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(2, 2, 2)$. Jika $\vec{a} = AB$ dan $\vec{b} = CA$ dan $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ maka tentukan vektor $\vec{c}$!
5. Carilah vektor-vektor kedudukan r_1 dan r_2 untuk titik-titik $P(2, 4, 3)$ dan $Q(1, -5, 2)$ dari sebuah sistem koordinat tegak lurus yang dinyatakan dalam vektor-vektor satuan i, j, k . Serta tentukan secara grafis dan analitis resultan dari vektor-vektor kedudukan ini!
6. Carilah sebuah vektor satuan yang sejajar resultan dari vektor-vektor $r_1 = 2i + 4j - 5k$ dan $r_2 = i + 2j + 3k$
7. Jika $A = 2i - 3j - k$, $B = i + 4j - 2k$, dan $C = 2i - 4j - 5k$. Tentukan:
 - a. $A + B + C$
 - b. $2A - 3B - C$
 - c. $|A|$, $|B|$, dan $|2C|$

- d. Vektor Satuan dari A , B dan C
 - e. Vektor Satuan dari $2A - 3B - C$
8. Tentukan koordinat titik potong dari persamaan garis r_1 dan r_2 , dimana $r_1 = (i + 2j + 4k) + t_1(2i - j + 4k)$ dan $r_2 = (i + 3j + k) + t_2(j - 3k)$
 9. Diketahui $A = i + 2j - k$, $B = i - j + 2k$, $C = 2i - j + 2k$ dan $D = i + 5j - k$, apakah himpunan vektor tersebut merupakan himpunan vektor yang bebas linier atau bergantung linier?
 10. Carilah persamaan garis dalam bentuk vektor, parameter dan skalar jika:
 - a. Melalui titik $A(1, 3, -1)$ dan arahnya ditentukan oleh arah $B = 2i - j + 3k$
 - b. Melalui 2 buah titik $P(1, 3, 1)$ dan $Q(2, 5, 1)$
 - c. Melalui titik $P(2, 3)$ dan sejajar dengan vektor $B = -i + 2j$

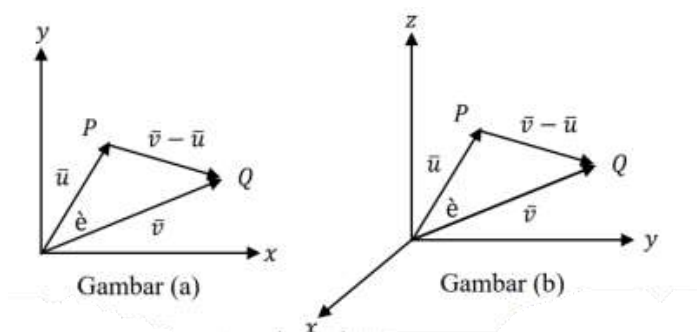
BAB 2

PERKALIAN TITIK DAN PERKALIAN SILANG

A. Perkalian Titik

1. Definisi Perkalian Titik

Hasil kali dalam (dot product) adalah perkalian dua vektor yang titik awalnya saling berhimpit dan kedua vektor tersebut membentuk sudut sebesar θ . Hasil kali dalam sering disebut juga hasil kali titik. Perhatikan ilustrasi di bawah ini.



Hasil kali dalam antara dua vektor didefinisikan sebagai berikut.

Jika u dan v adalah vektor-vektor di R^n dan θ adalah sudut di antara u dan v , maka hasil kali titik (dot product) atau hasil kali dalam *Euclids* (*Euclidean inner product*) $u \cdot v$ didefinisikan

$$u \cdot v = \begin{cases} \|u\| \|v\| \cos \theta & \text{jika } u \neq 0 \text{ dan } v \neq 0 \\ 0 & \text{jika } u = 0 \text{ dan } v = 0 \end{cases}$$

Untuk menghitung hasil kali dalam berdasarkan definisi di atas, maka perlu diketahui terlebih dahulu besar sudut antara kedua vektor. Jika besar sudut tersebut tidak diketahui, maka akan menyulitkan dalam perhitungan. Untuk perhitungan hasil kali dalam tanpa melibatkan besar sudut antara kedua vektor, dapat digunakan definisi berikut.

Jika $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di R^n , dan θ adalah besar sudut antara u dan v , maka hasil kali dalam antara kedua vektor tersebut didefinisikan:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

2. Sifat-sifat Perkalian Titik

Misalkan Jika u , v dan w adalah vektor-vektor di R^n dan k sebarang skalar, maka:

a. $v \cdot v = |v|^2$; yakni, $|v| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}$

Bukti :

Karena sudut θ diantara v dan v adalah 0, maka kita peroleh

$$v \cdot v = |v||v|\cos\theta = |v|^2\cos\theta = |v|^2$$

b. $u \cdot v = v \cdot u$ (Sifat Komutatif)

Bukti :

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3$$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

c. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ (sifat distributif)

Bukti :

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ dan $w = (w_1, w_2, w_3)$ maka

$$u \cdot (v + w) = (u_1, u_2, u_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3))$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3$$

$$= u \cdot v + u \cdot w$$

d. $k(u \cdot v) = (k \cdot u) \cdot v = u \cdot (k \cdot v)$

Bukti :

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$k(u \cdot v) = k(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$$

$$= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3$$

$$= (ku)v$$

$$\text{demikian juga, } k(u \cdot v) = u \cdot (kv)$$

e. $v \cdot v > 0$ jika $v \neq 0$ dan $v \cdot v = 0$ jika $v = 0$

f. Jika u dan v adalah vector-vector tak nol dan misalkan θ adalah sudut antara

kedua vektor itu, maka

$$\theta = \text{lancip} \quad j.h.j \ u \cdot v > 0$$

$$\theta = \text{tumpul} \quad j.h.j \ u \cdot v < 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad j.h.j \ u \cdot v = 0$$

Bukti :

Karena $\|u\| > 0, \|v\| > 0$ dan $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$, maka $u \cdot v$ mempunyai tanda sama seperti $\cos\theta$. Karena θ memenuhi $0 \leq \theta \leq \pi$ maka sudut lancip jika dan hanya jika $\cos\theta > 0$; dan θ tumpul jika dan hanya jika $\cos\theta < 0$; dan $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika dan hanya jika $\cos\theta = 0$.

g. $0 \cdot \bar{u} = 0$

Bukti :

$$0 \cdot \bar{u} = (0_i + 0_j)(\bar{u}_{1i} + \bar{u}_{2j})$$

$$0 \cdot \bar{u} = 0\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2$$

$$0\bar{u} = 0$$

h. $\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}||\bar{v}|$ ketidaksamaan schwart

Bukti :

Jika salah satu dari $\bar{u} = 0$ atau $\bar{v} = 0$ maka jelas ketidaksamaan schwart itu benar. Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ bukan vektor nol, dan misalkan θ adalah sudut antara kedua vektor itu, maka

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta \text{ Karena } |\cos\theta| \leq 1, \text{ maka}$$

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta \leq |\bar{u}||\bar{v}| \text{ (Terbukti)}$$

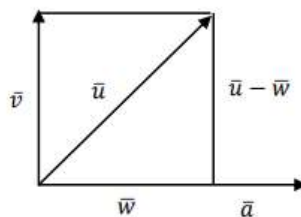
3. Proyeksi Ortogonal

Dua vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di R^n dikatakan ortogonal atau saling tegak lurus jika hasil kali dalamnya adalah nol, yaitu

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

Sudut antara kedua vektor tersebut adalah $\frac{\pi}{2}$ atau 90° .

Perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar Proyeksi Ortogonal $\bar{u}$ pada $\bar{a}$

Gambar di atas menunjukkan sebuah proyeksi ortogonal dari vektor $\bar{u}$ ke vektor $\bar{a}$, yaitu dengan menarik garis lurus pada titik ujung vektor $\bar{u}$ sehingga tegak lurus dengan vektor $\bar{a}$. Vektor $\bar{w}$ adalah hasil proyeksi ortogonal tersebut dan ditulis

$$\bar{w} = \text{proy}_{\bar{a}} \bar{u}$$

Vektor $\bar{w}$ adalah komponen vektor $\bar{u}$ yang sejajar dengan $\bar{a}$, sehingga

$$\bar{w} = k \bar{a}$$

dengan k suatu skalar. Perhatikan bahwa vektor $\bar{u} - \bar{w}$ tegak lurus dengan $\bar{a}$, sehingga diperoleh hasil kali dalam

$$(\bar{u} - \bar{w})\bar{a} = 0 \text{ atau } (\bar{u} - k\bar{a}) = 0$$

Oleh karena itu,

$$k = \frac{\bar{u}\bar{a}}{\bar{a}\bar{a}} = \frac{\bar{u}\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}$$

Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan proyeksi ortogonal sebagai berikut.

Dua vektor $\bar{u}$ dan $\bar{a}$ adalah vektor-vektor tak nol di R^n , maka komponen vektor $\bar{u}$ sepanjang $\bar{a}$ adalah

$$\text{proy}_{\bar{a}} \bar{u} = \frac{\bar{u}\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a}$$

Akibatnya, komponen vektor $\bar{u}$ yang orthogonal terhadap $\bar{a}$ adalah

$$\bar{v} = \bar{u} - \bar{w} = \bar{u} - \text{proy}_{\bar{a}} \bar{u} = \bar{u} - \frac{\bar{u}\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a}$$

4. Contoh Soal

- 1) Tinjaulah vektor-vektor $u = (2, -1, 1)$ dan $v = (1, 1, 2)$ tentukanlah sudut θ diantara u dan v
- 2) Tunjukkan bahwa vektor tak nol $u = (2, 3, 1, 4)$ dan $v = (1, 2, 0, 1)$ saling tegak lurus di R^4

Dengan demikian, u dan v ortogonal di R^4

- 3) Tentukan harga a sehingga $A = 2i + aj + k$ dan $B = 4i - 2j - 2k$ tegak lurus.
- 4) Jika $A = 2i - 3j - k$, $B = i + 4j - 2k$, dan $C = 2i - 4j - 5k$. Tentukan
 - a. $\text{Komp}_{\underline{B}} \vec{A}$
 - b. $\text{Komp}_{\underline{B}} \vec{C}$
- 5) Misalkan $u = (2, -1, 3)$ dan $a = (4, -1, 2)$. Carilah komponen vektor u sepanjang vektor a dan komponen vektor u yang orthogonal ke a

5. Latihan Soal

- 1) Carilah $u \cdot v$ untuk :

- a. $u = (3,1)$ dan $v = (3,3)$
 - b. $u = (-3,1,2)$ dan $v = (4,2,-5)$
- 2) Dari setiap bagian dari soal no 1, carilah cosinus sudut antara vector u dan v
 - 3) Buktikan sifat $k(u \cdot v) = (k \cdot u) \cdot v$ untuk $u = (6, -1, 2)$, $v = (2, 7, 4)$, dan $k = 1$
 - 4) Jika $u = (1, -2, 3)$, $v = (-3, 4, 2)$, dan $w = (3, 6, 3)$, Tentukan apakah u, v dan w membentuk sudut lancip, membentuk sudut tumpul atau orthogonal
 - 5) Jika $A = 2i - 3j - k$, $B = i + 4j - 2k$, dan $C = 2i - 4j - 5k$. Tentukan
 - a. $\text{Proy}_{\underline{B}} \vec{A}$
 - b. $\text{Proy}_{\underline{B}} \vec{C}$
 - c. $\text{Proy}_{\underline{C}} \vec{A}$

B. Perkalian Silang

1. Definisi Perkalian Silang

a. Secara Geometri

Hasil kali silang atau vektor dari $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah sebuah vektor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ (baca vektor A silang vektor B). Besarnya $\vec{A} \times \vec{B}$ didefinisikan sebagai hasil kali antara besarnya $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dan sinus sudut θ antara keduanya. Arah vektor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ tegak lurus pada bidang yang memuat $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ sedemikian rupa sehingga $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$ membentuk sebuah sistem tangan- kanan (Spiegel, 1999).

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \, \mathbf{u}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Dimana $\mathbf{u}$ adalah vektor satuan yang menunjukkan arah dari $\vec{A} \times \vec{B}$. Jika $\vec{A} = \vec{B}$, atau $\vec{A}$ sejajar dengan $\vec{B}$, maka $\sin \theta = 0$ dan kita mendefinisikan $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ (Spiegel, 1999).

b. Secara Analitis

Misalkan $\vec{A} = A_1i + A_2j + A_3k$ dan $\vec{B} = B_1i + B_2j + B_3k$ maka

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} k \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)i - (A_1B_3 - A_3B_1)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k \end{aligned}$$

2. Sifat-sifat Perkalian Silang

a. Sifat Anti Komutatif

Bukti :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = -(a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = (-a_3b_2 + a_2b_3, -a_1b_3 + a_3b_1, -a_2b_1 + a_1b_2)$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Terbukti bahwa $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b. Sifat Distributif

Bukti :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3 + c_1, c_2, c_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1))$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) + (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= (a_2b_3 + a_2c_3 - a_3b_2 - a_3c_2, a_3b_1 + a_3c_1 - a_1b_3 - a_1c_3, a_1b_2 + a_1c_2 - a_2b_1 - a_2c_1)$$

$$= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1))$$

Terbukti $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

c. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 k(\vec{a} \times \vec{b}) &= (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) \\
 &= k \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= k(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
 &= (ka_2b_3 - ka_3b_2, ka_3b_1 - ka_1b_3, ka_1b_2 - ka_2b_1) \\
 (k\vec{a}) \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= (ka_1, ka_2, ka_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
 &= (ka_2b_3 - ka_3b_2, ka_3b_1 - ka_1b_3, ka_1b_2 - ka_2b_1) \\
 &= (a_1, a_2, a_3) \times (kb_1, kb_2, kb_3) \\
 &= (a_2kb_3 - a_3kb_2, a_3kb_1 - a_1kb_3, a_1kb_2 - a_2kb_1) \\
 &= (ka_2b_3 - ka_3b_2, ka_3b_1 - ka_1b_3, ka_1b_2 - ka_2b_1)
 \end{aligned}$$

Terbukti $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$

d. $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} &= \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\
 (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} &= [(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}] \cdot [c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}] \\
 &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\
 \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) &= [a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}] \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}] \\
 &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\
 &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

e. Jika $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ dan $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ maka $\vec{a}$ sejajar dengan $\vec{b}$

Bukti :

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}| &= 0 \\
|\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta &= 0 \\
\sin \theta &= 0 \\
\theta &= 0^\circ
\end{aligned}$$

Karena sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 0° , maka kedua vektor ini sejajar.

f. $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{0} &= (a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0)\vec{i} + (a_3 \cdot 0 - a_1 \cdot 0)\vec{j} + (a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0)\vec{k} \\
&= 0 \\
\vec{0} \cdot \vec{a} &= (0 \cdot a_3 - 0 \cdot a_2)\vec{i} + (0 \cdot a_1 - 0 \cdot a_3)\vec{j} + (0 \cdot a_2 - 0 \cdot a_1)\vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

g. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= (a_2 a_3 - a_3 a_2)\vec{i} + (a_3 a_1 - a_1 a_3)\vec{j} + (a_1 a_2 - a_2 a_1)\vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$

3. Fungsi Vektor

Fungsi adalah suatu aturan yang memasangkan setiap elemen di daerah asal kepada sebuah elemen di daerah hasil. Fungsi vektor adalah fungsi yang daerah asalnya berupa himpunan bilangan real dan daerah hasilnya berupa himpunan vektor.

6) Pada R^2 :

Jika $a = [a_1, a_2]$ dinyatakan dengan garis berarah yang bertitik awal adalah titik asal 0, maka a disebut vektor posisi dari titik (a_1, a_2)

Misal f dan g masing-masing merupakan fungsi skalar t dalam selang (interval) I , maka $[f(t), g(t)]$ mendefinisikan sebuah vektor untuk setiap bilangan t dalam I . dikatakan bahwa suatu fungsi vektor $\underline{r}$ dengan selang I didefinisikan dan mempunyai nilai (vektor).

$$\underline{r}(t) = [f(t), g(t)], \text{ atau ditulis dengan } \underline{r}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j}$$

Artinya, jika $\underline{r}(t)$ menyatakan suatu vektor posisi untuk suatu bilangan t dalam I maka selama t menjelajahi semua nilai dalam I , titik ujung $P[f(t), g(t)]$ dari vektor posisi itu menjelajahi lengkungan datar (kurva dalam bidang datar).

Misal $\underline{r}$ suatu fungsi vektor yang didefinisikan oleh $\underline{r}(t) = [f(t), g(t)]$, maka limit $\underline{r}$ untuk mendekati $t_0 \in I$ adalah vektor.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = [\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)]$$

Dengan syarat bahwa $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$ ada.

Fungsi vektor $\underline{r}$ dikatakan kontinu di $t = t_0$ jika:

- (1) $\underline{r}$ terdefinisi di $t = t_0$
- (2) $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$ ada
- (3) $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Dengan demikian syarat perlu dan cukup agar $\underline{r}(t) = [f(t), g(t)]$ kontinu di $t = t_0$ ialah $g(t)$ keduanya kontinu di $t = t_0$. Secara umum apabila t berubah, maka Panjang atau besar dan arah $\underline{r}(t)$ juga berubah.

7) Pada R^3

Definisi-definisi untuk fungsi-fungsi vektor pada R^3 merupakan perluasan secara wajar dari definisi-definisi untuk fungsi-fungsi vektor pada R^2

Misalkan f, g dan h adalah fungsi-fungsi skalar t yang didefinisikan dalam suatu selang I , maka:

1. Suatu fungsi vektor $\underline{r}$ didefinisikan dalam selang I oleh:

$$\underline{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)], t \in I$$

atau dapat dituliskan dengan:

$$\underline{r}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}, t \in I$$

2. Jika $t_0 \in I$ maka limit r untuk $t \rightarrow t_0$ adalah vektor:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = [\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t), \lim_{t \rightarrow t_0} h(t)]$$

Dengan syarat ketiga limit diruas kana nada.

3. Fungsi vektor $\underline{r}$ yang didefinisikan oleh $\underline{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ dikatakan kontinu di $t = t_0$ jika dan hanya jika $f(t), g(t), h(t)$ masing-masing kontinu di $t = t_0$.

4. Contoh Soal/Kasus

- 1) Carilah persamaan untuk bidang yang ditentukan oleh titik-titik $A_1(4, -3, 2), A_2(1, 5, 4)$, dan $A_3(2, -2, 1)$!

- 2) Buktikan :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

- 3) Carilah vektor satuan yang tegak lurus pada $A = 7i + 2j - 3k$ dan $= i + 4j + 2k$!
 - 4) Sudut antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah 45° . Jika $|\vec{p}| = 10$ dan $|\vec{q}| = 8$, maka tentukan $|\vec{p} \times \vec{q}|$!
 - 5) Apakah $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + (2t + 1) \vec{k}$ merupakan sebuah fungsi vektor? Gambarlah grafiknya!
5. Latihan Soal
- 1) Diketahui vektor $\vec{A} = 5i + 2j - k$ dan $\vec{B} = 2i + 8j + 2k$. Tentukan hasil perkalian silang antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$!
 - 2) Carilah persamaan untuk bidang yang ditentukan oleh titik-titik $A_1(2, 10, -7)$, $A_2(1, -1, 3)$, dan $A_3(8, -2, -5)$!
 - 3) Sudut antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah 45° dengan $\vec{p} = (-3, 1, x)$. Jika $|\vec{p} \times \vec{q}| = 10$ dan $|\vec{q}| = 4$, maka tentukan $x^2 + 2x - 5$!
 - 4) Sudut antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah 30° . Jika $\vec{p} = (2, 7, -2)$ dan $|\vec{q}| = 5$, maka tentukan $|\vec{p} \times \vec{q}|$!
 - 5) Diketahui vektor $\vec{u} = (4, -4, 2)$ dan $\vec{v} = (2, -3, 1)$ dengan sudut 45° . Tentukan luas segitiga yang dibentuk oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$!

BAB 3

DIFERENSIASI VEKTOR

A. Turunan Parsial dari Vektor-Vektor

Jika A adalah sebuah vektor yang bergantung pada lebih daripada satu variabel skalar, katakan x, y, z misalnya maka kita tuliskan $A = A(x, y, z)$. Turunan parsial dari A terhadap x didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x, y, z) - A(x, y, z)}{\Delta x}$$

Jika limitnya ada. Begitupula,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{A(x, y + \Delta y, z) - A(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A(x, y, z + \Delta z) - A(x, y, z)}{\Delta z}$$

adalah masing-masing turunan parsial dari A terhadap y dan z jika limitnya ada.

Pernyataan kontinuitas dan diferensiabilitas untuk fungsi-fungsi dari satu variabel dapat diperluas bagi fungsi-fungsi dari dua atau lebih variabel. Misalnya, $\phi(x, y)$ dikatakan kontinu di (x, y) jika $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y)$ atau bila

untuk setiap bilangan positif ϵ kita dapat menemukan bilangan positif δ sehingga $|\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)| < \epsilon$ apabila $|\Delta x| < \delta$ dan $|\Delta y| < \delta$. Definisi yang sama berlaku pula untuk semua fungsi vektor.

Untuk fungsi-fungsi dari dua atau lebih dari variabel kita menggunakan istilah (diferensiabel) dengan pengertian bahwa fungsinya memiliki turunan-turunan parsial pertama yang kontinu.

B. Diferensial dari Vektor-Vektor

Mengikuti aturan-aturan yang mirip dengan yang dari kalkulus elementer. Misalnya,

1. Jika $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$, maka $dA = dA_1 i + dA_2 j + dA_3 k$
2. $d(A \cdot B) = A \cdot dB + dA \cdot B$
3. $d(A \times B) = A \times dB + dA \times B$

4. Jika $A = A(x, y, z)$ maka $dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$, dst

C. Geometri Diferensial

Menyangkut studi kurva-kurva ruang dan permukaan-permukaan. Bila C adalah sebuah kurva ruang yang didefinisikan oleh kurva $r(u)$, maka kita telah lihat bahwa $\frac{dr}{du}$ adalah sebuah vektor yang searah dengan garis singgung pada C . Jika skalar u diambil sebagai panjang busur s yang diukur dari suatu titik pada C maka $\frac{dr}{du}$ adalah sebuah vektor singgung satuan pada C dan dinyatakan dengan T .

Jika N adalah sebuah vektor satuan dalam arah normal ini, maka ia disebut normal utama (principal normal) pada kurva. Jadi $\frac{dT}{ds} = kN$ dimana k disebut kelengkungan dari C pada titik yang dispesifikasikan. Besaran $p = 1/k$ disebut jejari kelengkungan.

Vektor satuan B yang tegak-lurus pada bidang dari T dan N dan sedemikian rupa sehingga $B = T \times N$, disebut *binormal* terhadap kurva. Dari sini diperoleh bahwa T, N, B membentuk sebuah sistem koordinat tegak lurus tangan-kanan lokal pada sebarang titik dari C . Sistem koordinat ini disebut *trihedral* atau *triad* pada titik yang ditinjau. Bila s berubah, maka sistem koordinatnya bergerak dan dikenal sebagai *trihedral bergerak*.

Hirnpunan relasi-relasi yang mengandung turunan-turunan dari vektor-vektor fundamental T, N dan B secara kolektif dikenal sebagai rumus *Frenet - Serret* yang diberikan oleh:

$$\frac{dT}{ds} = kN, \frac{dN}{ds} = -kT - \tau B, \frac{dB}{ds} = \tau N$$

dimana τ adalah sebuah skalar yang disebut torsi (torsion). Besaran $\rho = 1/\tau$ disebut jejari torsi (*radius of torsion*).

Bidang oskulasi (*osculating plane*) pada sebuah kurva dititik P adalah bidang yang mengandung vektor satuan singgung dan normal utama di P . Bidang normal adalah bidang yang melalui P dan tegak-lurus vektor satuan singgung. Bidang yang meralat (*rectifying plane*) adalah bidang yang melalui P dan tegak-lurus normal utama.