

METODE NUMERIK

RIKAYANTI



METODE NUMERIK

RIKAYANTI



METODE NUMERIK

Penulis:
RIKAYANTI

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Desember 2023

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
; 18 x 25cm
ISBN : -

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT, yang senantiasa membimbing dan membuka wawasan berpikir sehingga buku perkuliahan ini dapat terselesaikan. Adapun tujuan penulisannya, untuk memfasilitasi mahasiswa dalam mendapatkan referensi atau bahan bacaan yang sederhana

Secara garis besar akan dibahas materi-materi metode numerik yang terkait dengan metode pencocokan kurva, interpolasi, dan persamaan differensial. Tetapi perlu diingat bahwa diperlukan suatu materi prasyarat dalam memahami isi dari buku. Meliputi konsep dalam kalkulus differensial dan aljabar matriks.

Ucapan terima kasih tidak lupa kami sampaikan pada para penulis buku-buku referensi yang dijadikan acuan dalam penyusunan. Apabila terdapat kesalahan dari segi isi dan kualitas, dengan ini kami menyatakan mutlak sepenuhnya milik kami.

Semoga penulisan buku ini bermanfaat dan menjadi sumber belajar yang mudah dicerna oleh para pembaca. Saran dan kritikan yang membangun demi perbaikan isi dan kualitas buku ini, kami terima dengan pikiran terbuka.

Bandung, Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
 BAB 1 PENDAHULUAN	
1.1 Orientasi Metode Numerik	1
1.2 Latar Belakang Matematis	3
1.3 Pemrograman Perangkat Lunak	5
1.4 Pendekatan dan Kesalahan	9
Ringkasan	31
Soal-Soal Latihan	32
 BAB 2 AKAR-AKAR PERSAMAAN	
2.1. Metode Akolade	35
Soal-Soal Latihan	51
2.2. Metode Terbuka	52
Soal –Soal Latihan	68
Ringkasan	71
 BAB 3 SISTEM PERSAMAAN ALJABAR LINEAR	
3.1 Eliminasi Gauss	78
3.2 Gauss-Jordan, Matriks Inversi dan Gauss Seidel	82
3.3 Sistem Persamaan Tak Linear	90
Ringkasan	94
Soal-Soal Latihan	96
 BAB 4 METODE PENCOCOKAN KURVA	
4.1 Latar Belakang Matematis	97
4.2 Regresi Kuadrat Terkecil	101
4.3 Interpolasi	109
Ringkasan	119
Soal-Soal Latihan	121
 BAB 5 INTEGRASI	
5.1 Formula Integrasi Newton-Cotes	123
5.2 Integrasi Romberg dan Kuadrat Gauss.....	130
Ringkasan	138
Soal-Soal latihan	140

BAB 6 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

6.1 Jenis-jenis Persamaan Diferensial Biasa	142
6.2 Metode Euler	143
6.3 Metode Heun	147
6.4 Metode Deret Taylor	151
6.5 Metode Runge-Kutta	154
Ringkasan	159
Soal-Soal Latihan	160

BAB 7 PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

7.1 Persamaan Diferensial Eliptik	162
7.2 Persamaan Diferensial Parabolik	168
7.3 Persamaan Diferensial Hiperbolik	169
Ringkasan	171

Daftar Pustaka	172
----------------------	-----

Lampiran.....	173
---------------	-----

BAB 1

METODE NUMERIK DAN KOMPUTASI DI ERA MODERN



1.1 Orientasi Metode Numerik

Masa sebelum ditemukannya komputer atau sering disebut masa prakomputer, berbagai metode telah dikembangkan dalam upaya memecahkan berbagai permasalahan.

Metode yang dikembangkan saat itu terbagi ke dalam tiga teknik. Pertama penurunan solusi untuk beberapa masalah secara analitis atau eksak. Metode unggul dalam beberapa perilaku sistem terutama permasalahan yang melibatkan geometri sederhana berdimensi rendah. Hal ini berakibat pada terbatasnya konteks permasalahan, sementara pada kenyataannya permasalahan tidak selalu linear.

Kedua solusi grafik untuk memperlihatkan perilaku sistem yang dibentuk oleh gambar atau nomograf. Hasil dari teknik ini terlalu rumit terutama untuk permasalahan yang berdimensi n sehingga hasilnya hanya terbatas pada ruang dimensi 1 sampai dengan 3 dengan tingkat keakuratan yang kurang presisi. Ketiga teknik kalkulator dan *slide-rule* yang menunjukkan keunggulan dalam permasalahan yang rumit. Namun proses kalkulasi manual yang terjadi cukup membosankan, bahkan akan menimbulkan kekeliruan-kekeliruan sederhana.

Metode numerik merupakan salah satu alternatif untuk mencari solusi terhadap suatu permasalahan matematis yang dapat diformulakan dan dapat diselesaikan dengan menggunakan sekumpulan aritmetika sederhana dengan operasi logika pada sekumpulan data numerik yang diberikan. Metode perhitungan yang digunakan disebut dengan algoritma. Metode numerik

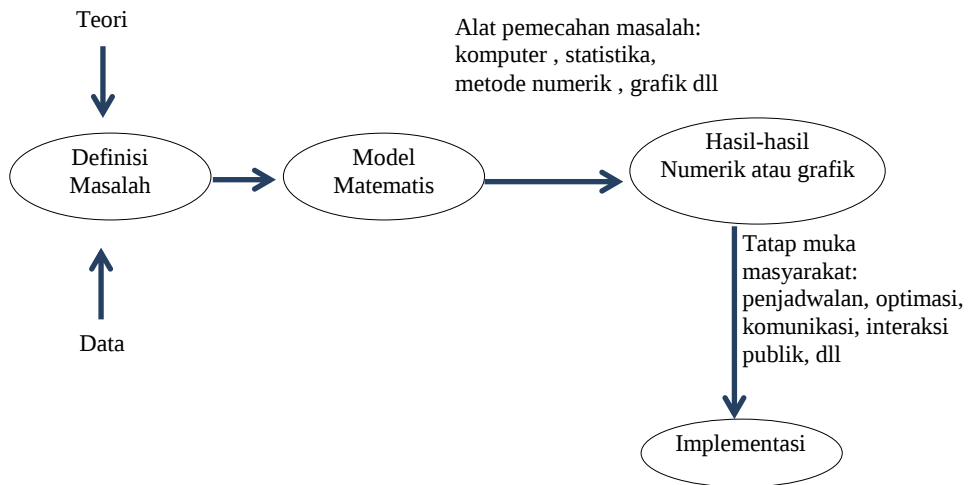
menggunakan pendekatan analitis matematis dengan mengembangkan algoritma pendekatan. Sehingga proses perhitungannya akan dilakukan secara berulang-ulang (iterasi) untuk terus menerus memperoleh hasil yang semakin mendekati nilai penyelesaian yang sebenarnya. Dalam proses yang demikian, tentunya setiap hasil perhitungan akan memiliki nilai galat (*error*) atau nilai kesalahan. Oleh sebab itu, dalam metode numerik nilai galat seringkali menjadi pembahasan. Hal ini bertujuan untuk meminimalisir tingkat kesalahan dalam pemakaian algoritma.

Alasan mengapa metode numerik perlu dipelajari:

1. Sebagai alat pemecahan masalah yang sangat ampuh seperti sistem persamaan besar, ketaklinearan, dan geometri yang rumit yang lazim dalam praktek rekayasa.
2. Merupakan teori pokok yang mendasari paket program komputer.
3. Dasar ilmu untuk merancang program sendiri seperti pengganti perangkat lunak yang sudah tersedia.
4. Merupakan sarana efisien untuk mempelajari pemakaian komputer pribadi.
5. Sarana untuk memperkuat pengertian matematika anda.

Permasalahan matematika yang seringkali dihadapi, termasuk ke dalam masalah matematika yang diselesaikan dengan metode analitik atau metode sejati. Metode tersebut memberikan nilai solusi yang sesungguhnya karena memiliki nilai galat nol. Tetapi, tidak semua permasalahan matematis dapat diselesaikan dengan metode analitik, oleh sebab itu diperlukan metode lain untuk mendapatkan solusi berupa hampiran (pendekatan) terhadap solusi sejatinya. Dengan kata lain, solusi tersebut nilai galatnya mendekati nol. Berikut ini gambaran secara umum mengenai metode numerik:





Gambar 1.1 Alur Pola Kerja Metode Numerik

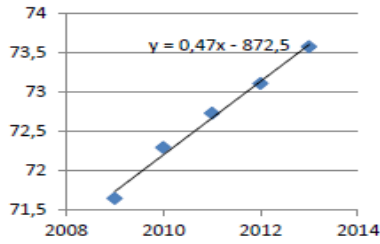
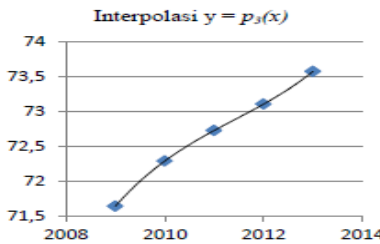
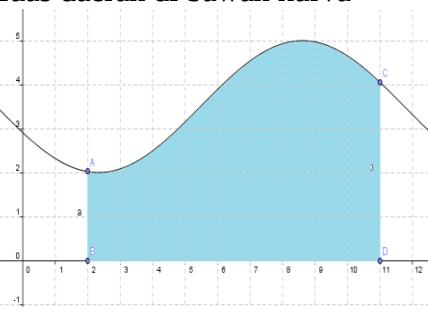
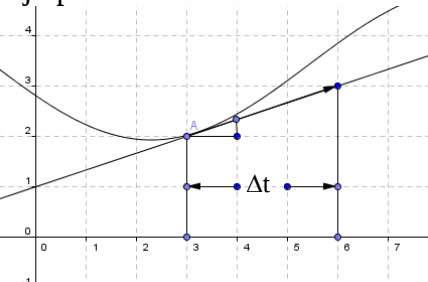
1.2 Latar Belakang Matematis

Setiap bagian dari buku ini memerlukan latar belakang matematis atau biasa dikenal dengan materi prasyarat, sebagai suatu landasan untuk mencapai keoptimalan dalam memahami aplikasinya. Berikut ikhtisarnya:

Tabel 1.1
Latar Belakang Matematis

No	Bagian / Bab	Visualisasi
1	Bab 2. Akar-akar persamaan Berkenaan dengan nilai suatu parameter atau variabel yang memenuhi suatu persamaan tunggal. Seringkali dijumpai pada konteks rancangan rekayasa yang rumit diselesaikan secara analitik.	
2	Bab 3. Sistem Persamaan Linear Mengenai nilai-nilai parameter atau variabel yang memenuhi beberapa persamaan secara simultan (bersama-sama). Misalkan pada konteks pemodelan matematis struktur, rangkaian listrik, dan jaringan fluida.	

Lanjutan tabel 1.1

No	Bagian / Bab	Visualisasi
3	Bab 3. Pencocokkan Kurva (<i>Curve Fitting</i>). Terdapat dua macam strategi yaitu regresi yang berkenaan dengan mencari suatu kurva dengan derajat kecocokan paling tinggi dalam artian derajat galat tertentu yang signifikan dikaitkan dengan data, tanpa harus mencocokkan data satu persatu. Kedua yaitu interpolasi untuk mengestimasi nilai diantara dua atau lebih data yang relatif bebas galat. Masalah berkenaan dengan ini cenderung pada hasil riset dan nilai tabulasi yang sudah baku.	Regresi  Interpolasi $y = p_3(x)$ 
4	Bab 4. Pengintegralan (Integrasi Numeris). Terkait dengan luas daerah tak beraturan atau luas daerah yang dibatasi suatu kurva. Permasalahan yang memerlukan konsep ini berhubungan dengan penentuan sentroid benda yang bentuknya tidak lazim, besaran total berdasarkan himpunan pengukuran diskrit, dan pada penyelesaian persamaan laju.	Luas daerah di bawah kurva 
5	Bab 5. Persamaan Diferensial (perubahan) atau laju biasa. Berkenaan dengan konsep-konsep dalam fisika terutama terkait perubahan pada suatu titik teramati. Masalah yang dikaji seperti pada peramalan populasi, percepatan benda jatuh, nilai awal dan syarat batas, dan nilai eigen.	Laju perubahan 



Lanjutan tabel 1.1

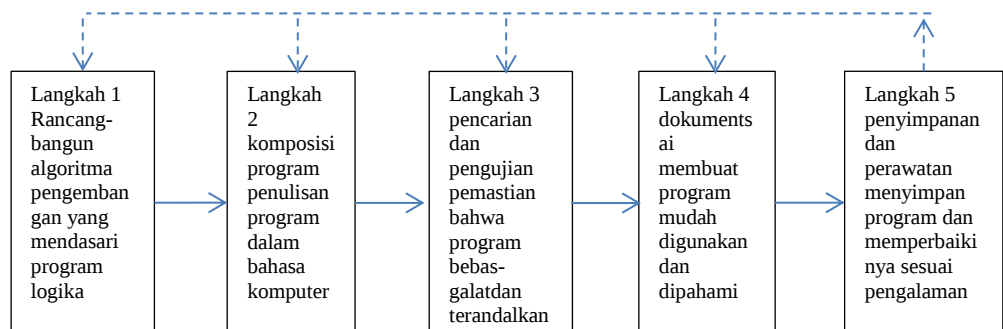
No	Bagian / Bab	Visualisasi
6	Bab 6. Persamaan Diferensial Parsial Mencirikan sistem rekayasa dimana perilaku kuantitas fisik diarahkan menurut tingkat perubahan yang mengikuti dua atau lebih peubah bebas. Misalkan pada vibrasi peubah waktu dari ikatan (waktu dan dimensi ruang). Penekanan lebih kepada penyelesaian <i>pointwise</i> .	

1.3 Pemrograman pada Perangkat Lunak

Metode numerik menggabungkan dua hal penting dalam masalah teknik yaitu matematika dan komputer atau dapat dikatakan sebagai matematika komputer. Keterampilan dalam pemrograman komputer memperkaya studi tentang metode numerik. Keunggulan dan kelemahannya dapat diketahui dengan detail manakala konsep-konsepnya diterapkan secara bertingkat (tandem) pada komputer untuk menyelesaikan masalah-masalah teknik.

1.3.1 Proses Pengembangan Perangkat Lunak

Perangkat lunak dapat dianalogikan sebagai otak pada tubuh manusia, pengembangan perangkat lunak mempunyai relevansi yang besar dalam menerapkan metode numerik, serta terdapat beberapa perubahan kualitatif yang terjadi di dalamnya.



Gambar 1.2 Proses Pengembangan Perangkat Lunak



a. Gaya Pemrograman

Berbicara mengenai gaya pemrograman tidak ada definisi baku yang menyatakan baik atau buruk. Dampaknya setiap orang mengembangkan kriterianya masing-masing. Beberapa kriteria yang sering digunakan adalah dari sisi penggunaan memori sesedikit mungkin, kecepatan eksekusi program, kecepatan pada penulisan pertama kali, dan lain-lain. Adapun kecenderungan industri komputasi dalam hal biaya perangkat keras dan lunak proporsi pada tahun 1950-an 70% dan 30%, tahun 1960-an 35% dan 65%, tahun 1970-an 20% dan 80%, serta tahun 1980-an 15% dan 85%.

b. Desain Modular

Desain ini dapat dianalogikan dengan sebuah buku yang di dalamnya terdapat bab dan sub bab untuk dapat dibaca dan dipahami dengan mudah. Program komputer dapat dibagi ke dalam program bagian yang kecil dan disebut dengan *modul*. Modul-modul biasanya pendek dan kurang dari 50 baris kode serta sangat terfokus.

Modul-modul biasa disebut sebagai subrutin atau prosedur yaitu sederetan perintah komputer yang bersama-sama melakukan tugas yang diberikan. Kemudian modul-modul ini akan menjadi operator pada program utama atau program pemanggil. Dapat dibayangkan bahwa dalam sebuah program utama terdapat modul-modul sebagai asisten dalam mengeksekusi suatu program besar.

Keunggulan desain ini adalah pemakaian unit yang kecil dan serba lengkap serta logika yang mendasarinya mudah dibuat dan dipahami baik oleh *programmer* ataupun pengguna. Sehingga apabila terdapat kesalahan, dapat diperbaiki pada masing-masing modul untuk kemudian dapat diintegrasikan kembali pada program utama. Hal ini dapat dilakukan karena masing-masing modul saling bertalian erat dan sudah terorganisasi.



c. Desain Puncak-Bawah (*Top-Down Design*)

Pengembangan dari instruksi yang bersifat umum ke khusus yang dinyatakan dalam unit-unit kecilnya merupakan ciri dari desain puncak-bawah. Desain program dikembangkan dengan membagi intruksi ke dalam serangkaian unit-unit yang di dalamnya terdapat pendefinisian mengenai deskripsi utama program. Proses ini terus berlanjut sampai dengan modul-modul terdefinisi dengan baik telah teridentifikasi.

d. Pemrograman Terstruktur

Pemrograman terstruktur hampir mirip dengan desain modular tetapi belum dapat dipastikan bahwa setiap instruksi dalam setiap modul jelas dan memiliki keteraturan yang berpadanan. Di dalamnya meliputi cara-cara bagaimana kode program yang sebenarnya dikembangkan sehingga mudah untuk dipahami dan dikembangkan serta tepat.

1.3.2 Desain Algoritma

Algoritma merupakan rancang bangun suatu perangkat lunak, seperti disebutkan Chapra (1988:27) algoritma merupakan serentetan (*sequence*) langkah logika yang diperlukan untuk melakukan suatu tugas tertentu seperti misalnya memecahkan masalah. Adapun mengenai ciri dari algoritma yang baik adalah:

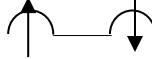
- 1) Setiap langkah bersifat deterministik dalam artian tidak bergantung pada *user*, siapapun penggunaanya akan menghasilkan keluaran yang identik.
- 2) Prosesnya harus selalu berakhir setelah sejumlah berhingga langkah dalam artian suatu algoritma tidak boleh berakhir terbuka (*open-ended*)
- 3) Algoritma harus cukup umum untuk menangani keperluan apapun.

Suatu algoritma dapat diterjemahkan ke dalam kode-kode tertentu yang biasa dikenal dengan bagan alir atau *flow chart*. Yaitu suatu pernyataan visual atau grafis yang menggunakan deret blok dan anak panah yang

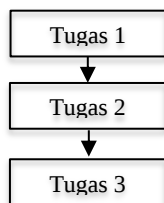


masing-masing menyatakan suatu operasi dalam algoritma. Adapun blok yang umum digunakan pada bagan alir dapat dilihat pada tabel berikut ini:

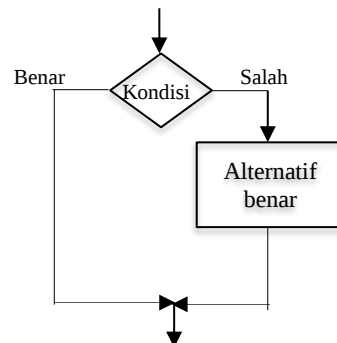
Tabel 1.2
Blok Bagan Alir

 Awal/akhir program	 Garis alir	 Proses	 Masukan/keluaran
 Keputusan	 penghubung ke halaman yang sama	 penghubung ke halaman selanjutnya	

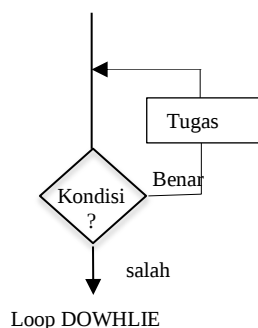
Semua bagan alir sebaiknya tersusun dari tiga struktur mendasar yaitu operasi-beruntun (*sequence*), pemilihan (*selection*), dan pengulangan (*repetition*). Seperti diperlihatkan pada gambar berikut ini:



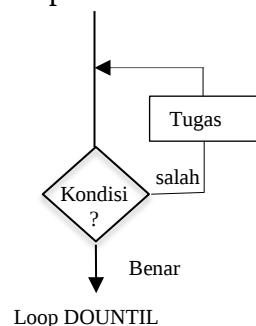
Gambar 1.3
Operasi -Beruntun



Gambar 1.4
Pola keputusan alternatif tunggal



Gambar 1.5
Pengulangan



Gambar 1.6
Pengulangan

1.4 Pendekatan dan Kesalahan

Bagian ini akan menunjukkan topik-topik dasar yang berhubungan identifikasi kuantifikasi dan dan minimalisasi kesalahan-kesalahan. Contoh sederhana dalam proses perhitungan yang biasa dilakukan pada saat menghitung $\frac{5}{\sqrt{3}}$ dibandingkan dengan $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ dengan mendekatkan nilai $\sqrt{3} = 1,73$ diperoleh $\frac{5}{\sqrt{3}} = 2,890173 \dots$ sedangkan pada perhitungan $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2,883\bar{3}$ dan hasil perhitungan dengan komputer adalah 2,88675134594781288225457439025098... kedua proses perhitungan memperlihatkan tingkat kesalahan yang berbeda. Dan hasil perhitungan kedua menunjukkan selisih kesalahan atau galat yang lebih kecil dibandingkan dengan yang pertama.

a. Angka signifikan atau angka Bena

Sebelum membahas mengenai angka signifikan, diperlukan pemahaman bahwa dalam matematika terdapat dua macam bilangan yaitu bilangan eksak dan bilangan aproksimasi. Bilangan eksak menunjukkan bilang yang nilainya pasti seperti $-1, 0, 1, 2, \frac{1}{2}, e, \pi, \dots$ sementara itu bilangan aproksimasi menunjukkan bilangan yang diwakili oleh suatu nilai yang mendekati seperti $\pi \approx 3,14159\dots, e = 2,7\dots$. Sebagian besar yang dibahas pada metode numerik adalah mengenai hampiran (aproksimasi), oleh sebab itu diperlukan pemahaman tentang konsep yang mendasari hampiran (aproksimasi). Dalam menyatakan suatu hampiran secara numerik, diperlukan suatu kepastian bahwa bilangan yang digunakan dapat digunakan secara meyakinkan. Sehubungan dengan hal tersebut, kepastian yang dimaksud dapat dinyatakan dalam suatu angka bena (*significant figure* atau *significant digits*). Angka signifikan adalah angka yang dapat digunakan dengan pasti dan berhubungan dengan angka tertentu ditambah dengan satu angka taksiran. Contoh pada bacaan speedometer dan odometer pada mobil, dimana ketelitian lebih

ditunjukkan oleh odometer yang menunjukkan jarak tempuh kendaraan semasa hidupnya. Chapra (2007: 74) Misalnya kita dapat memutuskan bahwa pendekatan kita dapat diterima kalau ia betul sampai 4 angka signifikan-yaitu bahwa 4 digit pertama adalah betul.

Beberapa contoh angka bena:

$4,3123 \times 10^1$ memiliki 5 angka signifikan

$1,764 \times 10^{-1}$ memiliki 4 angka signifikan

$1,2 \times 10^{-6}$ memiliki 2 angka signifikan

$2,78300 \times 10^2$ memiliki 6 angka signifikan

$0,2700090 \times 10^3$ memiliki 7 angka signifikan

$9,0 \times 10^{-3}$ memiliki 2 angka signifikan

$13,60 \times 10^2$; $0,1360 \times 10^1$; $1,360 \times 10^{-3}$ masing-masing memiliki 4 angka signifikan

$6,02 \times 10^{23}$ memiliki 24 angka signifikan (bilangan Avogadro)

$1,5 \times 10^7$ memiliki 8 angka signifikan (jarak bumi-matahari)

Nilai π , e , $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$... tidak dapat diungkapkan secara eksak dengan kata lain komputer hanya dapat menyimpan sejumlah tertentu angka bena, misalkan nilai π dianggap 3,141592653589793238462643... maka angka lainnya yang tidak tertulis dianggap sebagai *galat pembulatan (round-off error)*

Angka signifikan terkait dengan ketelitian dan ketepatan, ketelitian mengacu pada nilai yang sebenarnya, yang dihitung atau diukur dengan teliti. Sedangkan ketepatan mengacu pada nilai individu yang sebenarnya yang diukur dengan teliti terhadap jarak yang lain. Ketepatan dapat menunjukkan banyaknya angka signifikan yang menyatakan suatu besaran atau sebaran dalam penghitungan yang berulang-ulang atau pengukuran nilai yang teliti. Konsep angka signifikan yang terkait dengan ketepatan berlaku pada aturan pembulatan.



1. Pembulatan Ke Satuan Terdekat

Secara umum aturan pembulatan apabila angka yang akan dibulatkan ≥ 5 , maka nilai angka di hadapannya ditambah 1, jika angka yang akan dibulatkan < 5 , maka angka itu dihilangkan dan angka dihadapannya tetap.

Contoh 1.1

Bulatkan 1857674 ke:

10 satuan ukuran terdekat

100 satuan ukuran terdekat

1000 satuan ukuran terdekat

Penyelesaian:

185670 (angka 4 dihilangkan dan satuannya diganti nol karena $4 < 5$)

185700 (angka 7 dihilangkan dan satuannya 6 ditambah 1 karena $6 > 5$)

1858000 (angka 7 dihilangkan dan ribumannya 7 ditambah 1 karena $7 > 5$)

2. Pembulatan Ke Banyaknya Angka Desimal

Aturan pembulatan pada prinsipnya sama, tapi banyaknya angka desimal ditentukan sesuai dengan keperluan.

Contoh 1.2

1,347593 $\approx$ 1, 34759 pembulatan dengan 5 tempat desimal

1,34759 $\approx$ 1,3476 pembulatan dengan 4 tempat desimal

1,3476 $\approx$ 1,348 pembulatan dengan 3 tempat desimal

3. Pembulatan Ke Banyaknya Angka Signifikan/Bena

Angka bena atau angka signifikan dapat diartikan sebagai angka penting/berarti yang dapat diartikan sebagai tingkat ketelitian suatu alat ukur.

Contoh 1.3

0,01234000 mm mempunyai 7 angka signifikan

Karena dua angka nol di depan angka 1 hanya menunjukkan tempat desimal jadi dianggap tidak signifikan sedangkan tiga angka nol setelah angka 4



menunjukkan ketelitian alat ukur sampai ke per seratus jutaan terdekat, sehingga dianggap angka bena/signifikan/penting.

$1,8 \times 10^{-4}$ cm mempunyai 2 angka signifikan karena $1,8 \times 10^{-4} = 0,00018$

Contoh 1.4

0,0175430 $\approx$ 0,01754 pembulatan ke dalam 4 angka signifikan

0,2013801 $\approx$ 0,2014 pembulatan ke dalam 4 angka signifikan

10,0782005 $\approx$ 10,1 pembulatan ke dalam 3 angka signifikan

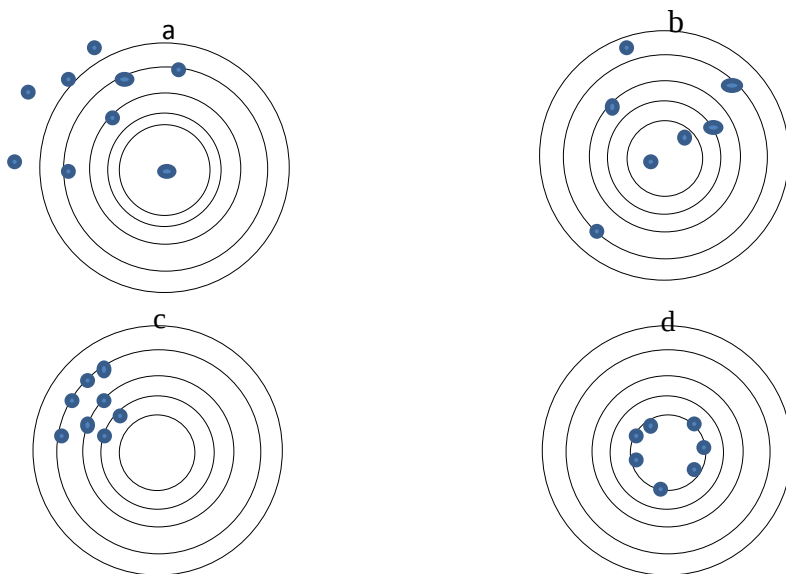
8,0500800 $\approx$ 8,1 pembulatan ke dalam 2 angka signifikan

b. Akurasi dan presisi

Akurasi atau akurat mengacu pada dekatnya nilai suatu bilangan atau pengukuran terhadap harga sebenarnya yang hendak dinyatakan. Sedangkan simpangan sistematis dari kebenaran merupakan suatu inakurasi atau tidak akurat yang disebut juga dengan bias. Jadi pada intinya akurasi lebih menunjukkan pada kedekatan suatu hasil perhitungan atau pengukuran terhadap nilai kebenaran yang dijadikan sebagai acuan.

Untuk memahami konsep presisi diperlukan suatu kasus yang dapat memperlihatkan maksud dari konsep tersebut.





Gambar 1.7

Menunjukkan kondisi tidak akurat dan tidak presisi, gambar b. menunjukkan kondisi akurat dan tidak presisi, gambar c. menunjukkan kondisi tidak akurat dan presisi, sedangkan gambar d. menunjukkan kondisi akurat dan presisi.

Simpulkan apa arti **PRESISI**???

c. Kesalahan

Penggunaan aproksimasi dalam menyatakan operasi dari besaran matematika menimbulkan suatu Kesalahan numerik atau biasa disebut dengan galat. Jenis galat terbagi ke dalam dua yaitu galat pemotongan *truncation-off error* yang disebabkan oleh aproksimasi yang digunakan untuk menyatakan suatu prosedur matematika eksak. Galat pembulatan *round-off error* yang dihasilkan oleh angka-angka aproksimasi yang digunakan untuk menyatakan angka pasti. Hubungan matematis yang menyatakan kondisi tersebut adalah:

$$\text{Harga sebenarnya} = \text{pendekatan} + \text{kesalahan} \dots (1.1)$$



Apabila ditetapkan sebuah harga pasti sebagai acuan, sebutlah E_t sebagai simpangan antara harga sebenarnya dengan aproksimasi dapat dinyatakan dengan ekspresi matematis berikut:

$$E_t = \text{Harga sebenarnya} - \text{aproksimasi} \dots (1.2)$$

Kelemahan dari definisi tersebut adalah tidak memperhitungkan acuan terhadap penaksiran suatu pengukuran. Misalkan galat 1 cm pada pengukuran suatu skrup akan berbeda dengan pengukuran pada tinggi gedung. Dengan kata lain galat 1 cm dari 10 cm akan berbeda maknanya dengan galat 1 cm dari 1000 cm. Sehingga diperlukan suatu normalisasi kesalahan terhadap harga sebenarnya yang dinyatakan dengan ekspresi matematis berikut:

$$\text{Kesalahan relatif fraksional} = \frac{\text{kesalahan sebenarnya}}{\text{harga sebenarnya}}$$

Hubungan matematis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persen yaitu

$$\epsilon_t = \frac{\text{kesalahan sebenarnya}}{\text{harga sebenarnya}} \times 100\% \dots (1.3)$$

Perlu diingat bahwa dalam kehidupan yang sebenarnya, seringkali harga eksak atau harga sejati tidak dapat ditentukan dengan pasti. Dengan kata lain, seringkali kita tidak mengetahui jawaban sebenarnya. Sehingga untuk mengantisipasi hal tersebut diperlukan suatu proses normalisasi dengan acuan terhadap taksiran yang terbaik. Konsep ini dikenal dengan kesalahan atau galat relatif.

$$\epsilon_a = \frac{\text{kesalahan aproksimasi}}{\text{aproksimasi}} \times 100\% \dots (1.4)$$

$$\epsilon_a = \frac{\text{aproksimasi sekarang} - \text{aproksimasi sebelumnya}}{\text{pendekatan sekarang}} \times 100\% \dots (1.5)$$

Tetapi, seringkali proses komputasi yang berulang tidak memperhatikan tanda dari galat. Sehingga diperlukan suatu batas toleransi praspesifikasi atau ϵ_s sehubungan dengan hal itu proses komputasi diulangi sampai dengan:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s \dots (1.6)$$



Dengan formulasi ϵ_s yang dapat dihitung dengan formula dari *Scarborough*, 1966 (Chapra, 2007: 79) yang menunjukkan bahwa kriteria berikut dipenuhi, kita dapat menjamin bahwa hasilnya adalah betul hingga sekurang-kurangnya n angka signifikan.

$$\epsilon_s = (0,5 \times 10^{2-n})\% \dots (1.7)$$

Contoh 1.5

Misalkan diperoleh nilai dari perluasan deret *Maclaurin* bahwa $e^x = 1$ kita akan menaksi nilai $e^{0,5}$ dengan menambahkan satu demi satu suku dari deret tersebut

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Penyelesaian: dengan menentukan kriteria kesalahan agar meyakinkan suatu hasil sampai sekurang-kurangnya tiga angka signifikan.

Nilai toleransi praspesifikasi untuk $n = 3$ adalah $\epsilon_s = (0,5 \times 10^{2-3})\% = 0,05\%$

Artinya proses komputasi akan dihentikan sampai batas $|\epsilon_a| < \epsilon_s$ atau $|\epsilon_a| < 0,05\%$

Karena nilai $x = 0,5$

maka pada langkah 1 diperoleh $e^{0,5} = 1 + x = 1 + 0,5 = 1,5$

dengan nilai kesalahan relatif persen sebenarnya untuk nilai

$e^{0,5} = 1,648721271$ adalah

$$\epsilon_t = \frac{1,648721271 - 1,5}{1,648721271} \times 100\% = 9,02\%$$

Nilai kesalahan relatifnya dihitung dengan

$$\epsilon_a = \frac{1,5 - 1}{1,5} \times 100\% = 33,3\%$$

Terlihat nilai ϵ_a masih jauh dari nilai toleransi praspesifikasi ϵ_s sehingga proses perhitungan akan diulang dengan suku berikutnya yaitu



$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ yang dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 1.3
Perhitungan Pendekatan Nilai $e^{0,5}$ pada Deret *Maclaurin*

suku	Hasil	ϵ_t %	ϵ_a %
1	1	39,34693	
2	1,5	9,020401	33,33333
3	1,625	1,438768	7,692308
4	1,645833333	0,175162	1,265823
5	1,648437500	0,017212	0,157978
6	1,648697917	0,001417	0,015795

Langkah ke-6 memperlihatkan ketercapaian pendekatan $|\epsilon_a| < \epsilon_s$ sehingga proses komputasi berhenti.

Solusi terdekat untuk nilai dari $e^{0,5}$ adalah 1,648697917 dengan kesalahan relatif 0,015795% atau 0,00015795.

1. Galat Pembulatan

Hasil perhitungan dengan metode numerik yang disajikan dengan komputer pada umumnya menggunakan bilangan riil, sehingga semua bilangan riil yang dihasilkan tidak tersajikan secara keseluruhan. Keterbatasan komputer dalam menyajikannya menimbulkan suatu galat yang disebut dengan galat pembulatan. Pembulatan itu sendiri merupakan pengurangan cacah digit pada suatu nilai hampiran dengan cara membuang beberapa digit terakhir. Penjelasan secara rinci telah dikemukakan sebelumnya, pengulangan pembulatan tidak disarankan dalam komputasi numerik karena berakibat pada membesarnya nilai galat.

Kesalahan pembulatan atau galat pembulatan bersumber dari fakta bahwa komputer hanya mampu menyimpan sejumlah angka signifikan tertentu dalam proses kalkulasi. Untuk kebutuhan proses kalkulasi maka dilakukan pemotongan terhadap banyaknya digit pada sebuah bilangan. Dalam istilah komputer dikenal dengan *truncation* tetapi untuk membedakan dengan istilah galat pemotongan maka pemotongan dalam hal ini disebut dengan *chopping*.

Contoh 1.6 Permasalahan Penerjun Payung

Apabila diberikan suatu permasalahan pada kecepatan penerjun payung dengan mempertimbangkan gaya gravitasi dan sebagainya dalam sebuah formula:

$$v(t) = \frac{gm}{c} [1 - e^{-(c/m)t}]$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i)$$

Dengan:

Nilai v : kecepatan, g : gravitasi = 980 cm/dtk^2 , c : koefisien tahanan geser = 12500 gr/dtk , m : massa penerjun = 68100 gr

Untuk nilai $t = 2 \text{ detik}$ diperoleh dan $v(0) = 0 \text{ cm/dtk}$

$$v(2) = v(0) + \left[980 - \frac{12500}{68100} v(0) \right] (2 - 0) = 1960 \text{ cm/dtk}$$

Untuk nilai $t = 4 \text{ detik}$ diperoleh dan $v(2) = 1960 \text{ cm/s}$

$$v(4) = v(2) + \left[980 - \frac{12500}{68100} v(2) \right] (4 - 2) = 3200,5 \text{ cm/dtk}$$

Untuk nilai $t = 6 \text{ detik}$ diperoleh dan $v(4) = 3200 \text{ cm/s}$

$$v(6) = v(4) + \left[980 - \frac{12500}{68100} v(4) \right] (6 - 4)$$

$$v(6) = v(4) + [980 - 590](2) = 4980 \text{ cm/dtk}$$

Secara lengkap hasil perhitungan dengan angka signifikan dari 3 sampai dengan 6.

Angka 590 merupakan proses pembulatan kedalam 3 angka penting dari kalkulasi

$$\frac{12500 \times 3200}{68100} = 587 \text{ menjadi } 590$$

Secara lengkap perhitungan akan diperlihatkan pada tabel 1.3



Tabel 1.4
Perbandingan Nilai Kecepatan Masalah Penerjun Payung
dengan Tiga sampai Enam Angka Signifikan

Waktu detik	Kecepatan, cm/detik (angka signifikan)			
	3	4	5	6
0	0	0	0,0	0,0
2	1960	1960	1960,0	1960,00
4	3200	3200	3200,4	3200,46
6	3980	3985	4985,5	3985,54
8	4470	4482	4482,3	4482,41
10	4780	4796	4796,8	4796,88
12	4980	4995	4995,8	4995,91

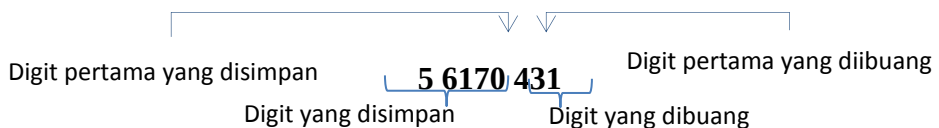
Dengan mengabaikan semua kesalahan pada contoh 1.6 jika dibandingkan dengan nilai kecepatan pada $t = 12$ detik maka kesalahan relatif fraksionalnya

$$v(12) = \frac{(980)(68100)}{12500} [1 - e^{-(12500/68100)12}] = 4749,0 \text{ cm/dtk}$$

$$\epsilon_t = \left| \frac{4794,0 - 4995,9}{4749,0} \times 100\% \right| = 5,20\%$$

Nilai galat dapat bernilai positif atau negatif apabila nilai mutlak tidak diperhatikan, nilai negatif menunjukkan nilai aproksimasi lebih tinggi daripada nilai acuan. Panduan umum aturan pembulatan kalkulasi manual:

- Pada saat melakukan pembulatan, digit yang signifikan disimpan dan yang tidak signifikan dibuang. Digit terakhir yang disimpan akan dibulatkan ke atas apabila digit pertama yang dibuang lebih dari 5. Untuk kasus lainnya, digit terakhir yang disimpan tetap dan tidak akan berubah. Apabila digit pertama yang dibuang adalah angka 5 atau 5 yang diikuti oleh 0 maka digit terakhir yang disimpan dinaikkan menjadi 1 hanya jika ia ganjil. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 1.8
Pembulatan ke dalam lima angka Signifikan



- ii. Untuk operasi penjumlahan dan pengurangan, pembulatan sedemikian sehingga digit terakhir yang disimpan dalam jawaban, sesuai dengan digit terakhir disimpan yang paling signifikan dalam bilangan-bilangan yang sedang ditambahkan atau dikurangkan. Penting mengingat bahwa satu digit dalam kolom ke 100 lebih signifikan dibanding satu digit pada kolom ke 1000.

Contoh 1.7 (catatan: digit terakhir disimpan dicetak miring)

$2, 2 - 1, 768 = 0,432$ dibulatkan menjadi 0,4

$4,68 \cdot 10^{-7} + 8,3 \cdot 10^{-4} - 228 \cdot 10^{-6} = 0,00468 \cdot 10^{-4} + 8,3 \cdot 10^{-4} - 2,28 \cdot 10^{-4} = 6,02468 \cdot 10^{-4}$ dibulatkan menjadi $6,0 \cdot 10^{-4}$

- iii. Untuk perkalian dan pembagian, pembulatan sedemikian sehingga jumlah angka signifikan dari hasil setara dengan jumlah angka signifikan terkecil yang termuat dalam besaran dalam operasi tersebut.

Contoh 1.8 (catatan: banyaknya angka signifikan pada hasil akhir mengacu pada besaran yang dicetak miring)

$0,062 \times 4,8 = 0,30816$ dibulatkan menjadi 0,31

- iv. Penggabungan operasi aritmetika, meliputi dua kasus umum yaitu:
 (perkalian atau pembagian) $\pm$ (perkalian atau pembagian)
 (penambahan atau pengurangan) $\times \div$ (penambahan atau pengurangan)
 Dalam kedua kasus, pengoperasian di dalam kurung didahulukan dan hasilnya dibulatkan sebelum diikuti oleh operasi berikutnya, dan tidak hanya membulatkan hasil akhir.



Contoh 1.9 (catatan: banyaknya angka signifikan mengacu pada angka yang dicetak miring)

$$[15,2 \times (2,\textbf{8} \times 10^{-4})] + [(8,456 \times 10^{-4}) \div 0,\textbf{177}]$$

Pertama, lakukan perkalian dan pembagian di dalam tanda kurung:

$$[4,256 \times 10^{-3}] + [4,78 \times 10^{-3}]$$

Kedua, sebelum menjumlahkan bulatkan besaran-besaran yang ada di dalam kurung

$$[4,\textbf{3} \times 10^{-3}] + [4,78 \times 10^{-3}]$$

Ketiga, jumlahkan dan hasil akhirnya bulatkan mengacu pada angka yang dicetak miring.

$$9,08 \times 10^{-3} \text{ dibulatkan menjadi } 9,\textbf{1} \times 10^{-3}$$

2. Galat Pemotongan

Kesalahan yang dihasilkan dari penggunaan suatu aproksimasi (metode numerik) pengganti prosedur matematika (analitis) eksak disebut dengan galat pemotongan *truncation error*. Galat ini disebabkan oleh penggunaan aproksimasi sebagai pengganti formula eksak. Artinya ekspresi matematik yang kompleks diganti dengan bentuk yang lebih sederhana. Adapun metodenya bergantung pada metode komputasi yang digunakan, hal ini yang mengakibatkan galat ini disebut juga sebagai **galat metode**.

Sebelum mempelajari lebih jauh mengenai galat pemotongan, diperlukan dasar-dasar pada perluasan deret Taylor. Materi prasyarat yang mendasari metode numerik adalah matematika dan dari sekian banyak teorema yang ada di dalamnya ada satu teorema yang menjadi kakas (*tools*) yang utama dan sangat penting, yaitu teorema *Deret Taylor*.



Teorema Taylor:

Jika fungsi f dan $n+1$ turunannya kontinu pada selang yang memuat a dan x maka nilai fungsi pada x diberikan oleh:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + R_n$$

dengan sisa R_n didefinisikan sebagai:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_{i+1} - x_i) \text{ dengan } x_i < \xi < x_{i+1} \text{ (}\xi \text{ baca xi atau ksi)} \quad \dots (1.8)$$

Jika sisa pada persamaan 1.1 dihilangkan maka fungsi tersebut dikatakan sebagai aproksimasi polinom terhadap $f(x)$.

Bentuk 1.2 disebut bentuk integral hanyalah salah satu cara menyatakan sisa.

Contoh 1.10

Hampiri fungsi $f(x) = \sin x$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 1$.

Penyelesaian:

Terlebih dahulu akan ditentukan turunan $\sin(x)$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \dots \text{ dan seterusnya}$$

berdasarkan teorema Taylor maka dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\sin(x) = \sin(1) + \frac{(x-1)}{1!} \cos(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} (-\sin(1)) + \frac{(x-1)^3}{3!} (-\cos(1)) + \dots$$

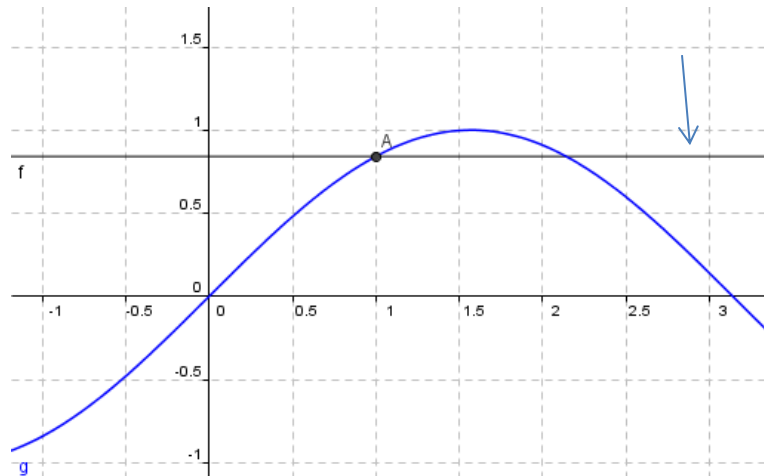
bila dimisalkan $x - 1 = h$, maka akan diperoleh:

$$\sin(x) = \sin(1) + h \cos(1) - \frac{h^2}{2} \sin(1) - \frac{h^3}{6} \cos(1) + \dots$$

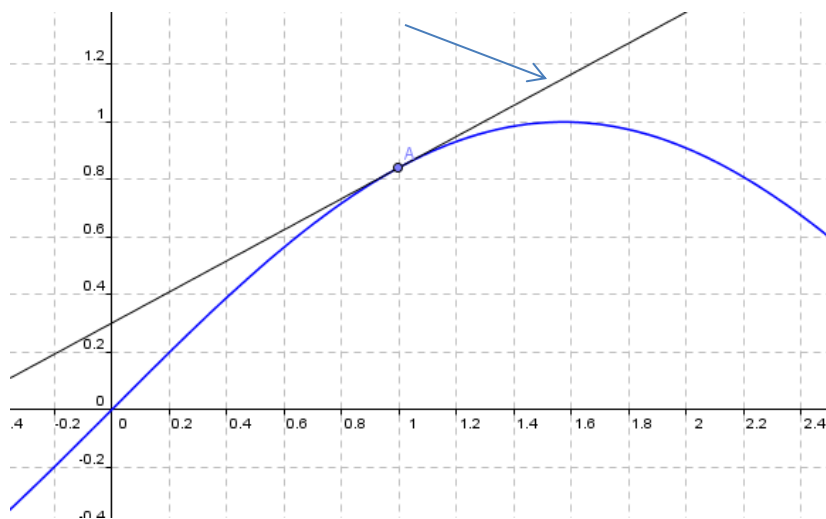
$$\sin(x) = 0,8415 + 0,5403h - 0,4208h^2 - 0,0901h^3 + \dots$$



berikut ini gambaran kurva fungsi $\sin(x)$ disekitar $x = 1$ yang dibangun suku demi suku:



Gambar 1.9 Orde nol dengan fungsi $f(x) = 0,8415 \frac{(x-1)^0}{0!}$



Gambar 1.10

Orde pertama dengan fungsi $f(x) = 0,8415 \frac{(x-1)^0}{0!} + 0,5403 \frac{(x-1)^1}{1!}$





Gambar 1.11 Deret Taylor orde kedua
 $f(x) = 0,84015 + 0,5403(x-1) - 0,4208(x-1)^2$

Jika ditambahkan lagi satu suku maka akan diperoleh polinom berderajat tiga.

catatan: kasus yang spesial terjadi saat fungsi diperluas di sekitar $x_0 = 0$ maka deretnya dinamakan deret *Maclaurin* yang merupakan deret *Taylor Baku* paling sering muncul dalam praktek.

Contoh 1.11

Uraikan $\sin(x)$, e^x , $\cos(x)$, dan $\ln(x+1)$ masing-masing ke dalam deret Maclaurin

Penyelesaian:

- $\sin(x) = \sin(0) + \frac{(x-0)}{1!} \cos(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} (-\sin(0)) + \frac{(x-0)^3}{3!} (-\cos(0)) + \dots$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

- Untuk menentukan deret Maclaurin maka diperlukan turunan dari e^x

$$e^x = e^0 + \frac{(x-0)}{1!} e^0 + \frac{(x-0)^2}{2!} e^0 + \frac{(x-0)^3}{3!} e^0 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



- Untuk menentukan deret Maclaurin maka diperlukan turunan dari $\cos(x)$

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{(x-0)}{1!}(-\sin(0)) + \frac{(x-0)^2}{2!}(-\cos(0)) + \frac{(x-0)^3}{3!}(\sin(0)) + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

- Untuk menentukan deret Maclaurin maka diperlukan turunan dari $\ln(x+1)$

$$\ln(x+1) = \ln(1) + \frac{(x-0)}{1!}(0+1)^{-1} + \frac{(x-0)^2}{2!}(-(0+1))^{-2} + \frac{(x-0)^3}{3!}2(0+1)^{-3} + \dots$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Suku-suku pada deret Taylor tidak berhingga banyaknya, sehingga untuk keperluan tertentu dan supaya lebih praktis maka diperlukan pemotongan. Pemotongan deret Taylor sampai orde tertentu dinamakan dengan deret Taylor terpotong dan dinyatakan oleh:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!}f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + R_n(x_i)$$

dalam hal ini R_n adalah galat atau sisa (residu)

$$R_n(x_i) = \frac{(x_{i+1}-x_i)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad , x_i < \xi < x_{i+1} \dots (1.9)$$

Sehingga deret Taylor yang terpotong sampai dengan orde ke- n dinyatakan:

$$f(x_{i+1}) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$\text{dengan } P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(x_{i+1}-x_i)^k}{k!}f^{(k)}(x_i)$$

$$\text{dan } R_n(x) = \frac{(x_{i+1}-x_i)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \text{ dengan } x_i < \xi < x_{i+1} \dots (1.10)$$

Contoh 1.12

Perhatikan kembali contoh 1.11 deret Taylor terpotong di sekitar $x_0 = 0$ disebut deret Maclaurin terpotong orde 6 untuk permasalahan $\sin(x)$ adalah:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x) ; R_5(x) = \frac{x^6}{6!}\cos(c) \text{ (sampai suku orde 5)}$$

